I.

Die allgemeine Bewegung des Bornschen Elektrons

II.

Eine integrallose Darstellung von Parallelkurven im dreidimensionalen Raum

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT BASEL

VON

ERWIN VOELLMY

AUS BASEL

BASEL
Buchdruckerei K. J. Wyss
1917

I.

Die allgemeine Bewegung des Bornschen Elektrons

II.

Eine integrallose Darstellung von Parallelkurven im dreidimensionalen Raum

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT BASEL

VON

ERWIN VOELLMY

AUS BASEL

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

BASEL
Buchdruckerei K. J. Wyss
1917

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der Philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. E. Hecke und Dr. O. Spiess.

Basel, den 10. Juli 1916.

Prof. Dr. Fr. Fichter,
Dekan.

Meiner lieben Mutter

in herzlicher Dankbarkeit gewidmet.

I.

Die allgemeine Bewegung des Bornschen Elektrons.

Die Bewegungsgleichungen des Elektrons sind von Planck,[1]) Herglotz,[2]) Abraham[3]) u. a. unter Zugrundelegung des alten Newtonschen Starrheitsbegriffs aufgestellt worden. Die moderne Relativitätstheorie hat aber einen andern Starrheitsbegriff notwendig gemacht; deshalb hat Born[4]) 1909 die Theorie eines starren Körpers aufgestellt, der im dreidimensionalen Raume Lorentzkontraktionen erfährt, aber in der vierdimensionalen Zeitraumwelt Minkowskis starr ist. Mit diesem neuen Begriff hat Born jedoch nur die sogenannte Hyperbelbewegung des Elektrons näher behandelt. Daran anschliessend haben W. Behrens und E. Hecke[5]) für die allgemeine geradlinige Bewegung des Elektrons die Gleichungen angegeben, die die Geschwindigkeit des Elektronenmittelpunkts mit den Vektoren des äussern Feldes verknüpfen; sie haben zu diesem Zwecke die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft nach Potenzen seines Radius entwickelt. Später haben noch Föppl und Daniell[6]) die Kinematik des Bornschen starren Körpers für eine beliebige ebene Bewegung betrachtet; doch führen ihre Formeln auf das Integral der zweiten Krümmung einer Raumkurve, das sich im allgemeinen nicht angeben lässt. Meine Arbeit schliesst nun nicht an diese, sondern an die vorher genannte an, indem mich Herr Professor Dr. Hecke darauf hin-

[1]) M. Planck: Über elektrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden. Ann. de Phys. Neue Folge. Bd. 60, 1897.

[2]) G. Herglotz: Zur Elektronentheorie. Göttinger Nachrichten 1903. Math.-phys. Klasse.

[3]) M. Abraham: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. 2. Auflage. Leipzig 1908.

[4]) M. Born: Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips. Ann. de Phys. 4. Folge. Bd. 30, 1909.

[5]) W. Behrens und E. Hecke: Über die geradlinige Bewegung des Bornschen starren Elektrons. Göttinger Nachrichten 1912. Math.-phys. Klasse.

[6]) Ludwig Föppl und Percy Daniell: Zur Kinematik des Bornschen starren Körpers. Göttinger Nachrichten 1913. Math.-phys. Klasse.

gewiesen hat, dass sich die dort durchgeführte Rechnung auch auf vier Dimensionen ausdehnen lässt mit Hilfe eines allgemeinen Ansatzes von Parallelkurven.

Ich schicke daher die geometrische Begründung dieses Ansatzes voran.

Darstellung der Parallelkurven im R_4.

Die Parallelkurven einer gegebenen Kurve im Raum von n Dimensionen sind definiert als die orthogonalen Trajektorien der $n-1$ dimensionalen Räume (Ebenen), die zur gegebenen Kurve normal stehen; ihre Mannigfaltigkeit ist gleich der Mannigfaltigkeit der Punkte eines solchen Normalraumes. Diese Definition schliesst die Gleichabständigkeit der Parallelkurven in sich.

Im R_4 bilden die Parallelkurven eine dreiparametrige Schar, weil die Normalräume dreidimensional sind. Der einem Punkt der gegebenen Kurve entsprechende Punkt einer Parallelkurve liegt in dem Normalraume, der zu der gegebenen Kurve in dem betreffenden Punkte errichtet wird: Orthogonalitätsbedingung. Wegen der Dimensionenzahl dieses Normalraumes kann der die beiden Punkte verbindende Vektor durch drei nicht in eine Ebene fallende Vektoren linear dargestellt werden. Man findet dann den laufenden Punkt der Parallelkurve, indem man diese drei Vektoren zum Vektor des laufenden Punktes der gegebenen Kurve addiert. Schliesslich muss der tangentiale Vektor der Parallelkurve nach der Definition parallel sein zum tangentialen Vektor der gegebenen Kurve: Parallelitätsbedingung. Alle diese Vektoren sind veränderlich und müssen als Funktionen der gegebenen Kurve aufgefasst werden. Diese selber sei dargestellt durch vier analytische Funktionen eines Parameters τ:

$$x_1 = x_1(\tau)$$
$$x_2 = x_2(\tau)$$
$$x_3 = x_3(\tau)$$
$$x_4 = x_4(\tau)$$

Im folgenden seien die Ableitungen nach diesem Parameter immer durch Striche angegeben. Seien dann $X_1(\tau)$, $X_2(\tau)$, $X_3(\tau)$, $X_4(\tau)$, die gesuchten Koordinaten der Parallelkurve, so stellen die vier Grössen $(X_1 - x_1)$, $(X_2 - x_2)$ .... den verbindenden Vektor dar, und die Orthogonalitätsbedingung lautet

$$x_1'(X_1 - x_1) + x_2'(X_2 - x_2) + x_3'(X_3 - x_3) + x_4'(X_4 - x_4) = 0$$

wofür abkürzend geschrieben werden soll:

1) $$\sum_1^4{}_n \left[x_n'(X_n - x_n)\right] = 0.$$

Das griechische Summenzeichen soll in dieser Arbeit immer und ausschliesslich für solche Summen über die vier Koordinatenrichtungen gebraucht werden, so dass die Beifügung der Indizes unterbleiben kann.

Die Parallelitätsbedingung

2α) $$X_1' : X_2' : X_3' : X_4' = x_1' : x_2' : x_3' : x_4'$$

ist gleichwertig den vier Gleichungen

2β) $$X_n' = P\, x_n' \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

worin der Proportionalitätsfaktor P eine skalare Funktion von τ ist. Die drei Differentialgleichungen erster Ordnung 2α) sind äquivalent einer Differentialgleichung dritter Ordnung. Ist deshalb

$$X_n - x_n = u_n$$

eine erste, ebenso v_n eine zweite und w_n eine dritte spezielle Lösung, so wird die allgemeine Lösung mit drei Konstanten dargestellt durch

$$X_n - x_n = C_1 u_n + C_2 v_n + C_3 w_n.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen 2β), dass neben 1) auch gilt

$$\sum \left[X_n'(X_n - x_n)\right] = 0.$$

Subtrahiert man davon die Gleichung 1), so erhält man

$$\sum \left[(X_n' - x_n')(X_n - x_n)\right] = 0$$

und hieraus durch Integration

$$\sum (X_n - x_n)^2 = konst.$$

Einsetzen der allgemeinen Lösung in diese Gleichung liefert die Beziehung

$$C_1^2 \sum u_n^2 + C_2^2 \sum v_n^2 + C_3^2 \sum w_n^2 + 2\,(C_1 C_2 \sum u_n v_n + C_2 C_3 \sum v_n w_n + C_3 C_1 \sum w_n u_n) = konst.$$

Diese erfordert, dass alle hier vorkommenden Summen von Quadraten und von Doppelprodukten der u_n, v_n, w_n konstant sind. Diese, sowohl in den C als auch in den u_n, v_n, w_n quadratische Form lässt

sich dann immer in eine Summe von Quadraten verwandeln durch eine Substitution mit von τ unabhängigen Koeffizienten

$$u_n = c_1^{(u)} p_{n1} + c_2^{(u)} p_{n2} + c_3^{(u)} p_{n3}$$
$$v_n = c_1^{(v)} p_{n1} + c_2^{(v)} p_{n2} + c_3^{(v)} p_{n3}$$
$$w_n = c_1^{(w)} p_{n1} + c_2^{(w)} p_{n2} + c_3^{(w)} p_{n3}$$

Es entsteht dadurch eine Form:

$$B_{11} \sum p_{n1}^2 + B_{22} \sum p_{n2}^2 + B_{33} \sum p_{n3}^2 + B_{12} \sum p_{n1} p_{n2} + \\ + B_{23} \sum p_{n2} p_{n3} + B_{31} \sum p_{n3} p_{n1} = konst.$$

Da die Quadratsummen wiederum konstant sein müssen, kann die betreffende Konstante in die davorstehende einbezogen werden, so dass

3) $$\sum p_{n1}^2 = \sum p_{n2}^2 = \sum p_{n3}^2 = 1$$

und andererseits sollen die drei folgenden Terme verschwinden, d. h.

4) $$\sum p_{n1} p_{n2} = \sum p_{n2} p_{n3} = \sum p_{n3} p_{n1} = 0.$$

Diese Gleichungen drücken aus, dass die p_{n1}, p_{n2}, p_{n3} oder allgemein p_{nk} ein System von aufeinander senkrechten Einheitsvektoren bilden. Habe nun die allgemeine Lösung deswegen die Form

5) $$X_n - x_n = A_1 p_{n1} + A_2 p_{n2} + A_3 p_{n3}$$

mit drei willkürlichen Konstanten, deren Quadratsumme das Quadrat des Abstands der Parallelkurve von der gegebenen Kurve angibt, so verlangt die Bedingung 1), dass

$$A_1 \sum x_n' p_{n1} + A_2 \sum x_n' p_{n2} + A_3 \sum x_n' p_{n3} = 0.$$

Wegen der vollständigen Willkürlichkeit der Konstanten A_k zerfällt diese Gleichung in die drei

6) $$\sum x_n' p_{n1} = \sum x_n' p_{n2} = \sum x_n' p_{n3} = 0,$$

welche besagen, dass die p_{n1}, p_{n2}, p_{n3} auf der Kurve senkrecht stehen. Die bisherigen Bedingungen sind gewöhnliche Gleichungen; erst wegen 2β) treten nun noch Differentialgleichungen für die p_{nk} hinzu. Durch Einsetzen ergibt sich:

$$x_n' + A_1 p_{n1}' + A_2 p_{n2}' + A_3 p_{n3}' = P x_n'$$

7) $$A_1 p_{n1}' + A_2 p_{n2}' + A_3 p_{n3}' = (P - I) x_n'.$$

Die Willkürlichkeit der Konstanten erfordert hier, dass jedes p_{nk}' proportional x_n' sei, also

$$p'_{n1} = P_1 x'_n$$

7α) $$p'_{n2} = P_2 x'_n$$

$$p'_{n3} = P_3 x'_n$$

wo die P_k skalare Funktionen von τ sein müssen; ebenso wird dann der Proportionalitätsfaktor

8) $$P = 1 + A_1 P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3$$

eine skalare Funktion von τ, wie es unter 2 β) verlangt wird. Die P_k sind voneinander abhängig, wie später gezeigt wird.

Die Gleichabständigkeit wird nun in der Tat eine Folge der übrigen Bedingungen. Eine zweite Parallelkurve der gegebenen Kurve sei:

$$X_n = x_n + B_1 p_{n1} + B_2 p_{n2} + B_3 p_{n3}$$

Dann ist ihr Abstand ε von der Kurve 5) der absolute Betrag des Vektors

$$(B_1 - A_1) p_{n1} + (B_2 - A_2) p_{n2} + (B_3 - A_3) p_{n3}$$

also wegen 3) und 4)

$$\varepsilon^2 = (B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2 + (B_3 - A_3)^2 = konst.$$

Infolge der Differentialgleichungen 2 α) entfällt auf jeden Vektor eine Konstante. Die drei Freiheitsgrade des Vektorsystems p kann man so deuten: ein beliebiger erster der drei Vektoren braucht nur zur Tangente normal zu stehen und hat deshalb (im R_4) zwei Freiheitsgrade; ein zweiter muss zur Tangente und ausserdem zum ersten normal sein; er hat also noch einen Freiheitsgrad; der dritte Vektor ist dann eindeutig dadurch bestimmt, dass er zur Tangente und zu den beiden vorhergehenden Vektoren normal stehen muss. Wenn Eindeutigkeit gewünscht wird, so kann sie durch die folgende Verabredung erzielt werden. Die Raumkurve besitzt ein durch Differentialgleichungen (die Frenetschen Formeln) bestimmtes „begleitendes Vierkant". Es werde nun angenommen, dass das Vektorsystem der p z. B. im Punkte $\tau = 0$ mit dem begleitenden Vierkant zusammenfalle. Dadurch ist es dann genau bestimmt, obwohl die Übereinstimmung der beiden Systeme beim Fortschreiten auf der Kurve im allgemeinen nicht bestehen bleibt. Es entspricht dieses Verhalten vollständig dem Verhalten der Parallelkurven im dreidimensionalen Raume.[1])

[1]) G. Scheffers: Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, 1910. Insbesondere die Bemerkungen Seite 402 und 404.

Die in 7 a) auftretenden Grössen P_k besitzen eine gewisse geometrische Bedeutung. Aus den drei Gleichungen 6) ergibt sich durch Differentiation:

$$\sum x'' \; p_{nk} + \sum x' \; P_k \, x' = \sum x'' \; p_{nk} + P_k \sum x'^2 = 0$$

9) $$P_k = - \frac{\sum x'' \; p_{nk}}{\sum x'^2}.$$

Darin hängt der Nenner von der Wahl des Kurvenparameters ab; er wird insbesondere gleich eins, wenn τ die Bogenlänge der Kurve ist. Um die Bedeutung des Zählers zu zeigen, setze ich zunächst:

10) $$b = \left| (\sum x''^{\,2})^{\frac{1}{2}} \right|.$$

Dann sind die $\frac{x''_n}{b}$ Einheitskomponenten und können als die vier Richtungskosinus des Vektors x''_n aufgefasst werden. Es folgt dann aus der Bedeutung des skalaren Produktes:

$$\sum \frac{x''}{b} \, p_{nk} = \cos (x'' \,|\, p_k) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

11) $$P_k = - \frac{b \cos (x'' \,|\, p_k)}{\sum x'^2}.$$

Die P_k sind also proportional dem Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren x''_n und p_{nk}. Da der tangentiale Vektor x'_n auf den drei Vektoren p_{n1}, p_{n2}, p_{n3} senkrecht steht, so gilt noch

$$\cos^2 (x'' \,|\, p_{n1}) + \cos^2 (x'' \,|\, p_{n2}) + \cos^2 (x'' \,|\, p_{n3}) + \cos^2 (x'' \,|\, x') = 1$$

woraus die Beziehung hervorgeht:

12) $$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = \frac{b^2}{(\sum x'^2)^2} \, (1 - [\sum x' \; x'']^2).$$

Es können leicht weitere Beziehungen dieser Art abgeleitet werden; das soll aber erst geschehen, wenn in der nachfolgenden Anwendung über den Kurvenparameter verfügt worden ist.

Das Bornsche Elektron.

Die Bewegung des Bornschen starren Elektrons ist bestimmt durch die Anfangslage und den zeitlichen Verlauf der Bewegung eines einzigen Punktes, im vierdimensionalen Raum also durch die Angabe der Anfangslage und die Weltlinie des geführten Punktes. Als solchen

wählt man zweckmässig den Mittelpunkt des Elektrons, das hier notwendig ein Körper von zentrischer Symmetrie sein muss. Bis zu einer gewissen Stelle der Rechnung erweist sich diese Annahme über die Gestalt als genügend; damit ich aber nachher den Parallelkurvenansatz aus der Rechnung eliminieren kann, muss ich weiter annehmen, dass das Elektron eine Kugel vom Radius a sei.

Die Bornsche Definition des starren Körpers besagt nun einfach, dass die Weltlinien aller übrigen Punkte des Elektrons zu der vorgegebenen gleichabständig sein müssen; sie sind also definiert als eine dreiparametrige Schar von Parallelkurven.

Die Weltlinie des Mittelpunktes sei gegeben durch vier analytische Funktionen eines Parameters:

$$x_n = x_n(\tau) \qquad (n = 1, 2, 3, 4).$$

Als Parameter wählt man mit Vorteil die Eigenzeit der Weltlinie, d. h. man nimmt die Lichtgeschwindigkeit c zur Längeneinheit und berechnet den Parameter so, dass

$$13) \qquad d\tau = [-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)]^{\frac{1}{2}}$$

Das hierüber von einem festen Anfangspunkt bis zu einem veränderlichen Endpunkt zu erstreckende Integral misst nach Minkowski[1]) die Eigenzeit der Materie an dieser Stelle, hier also die Eigenzeit der Weltkurve in dem betreffenden Endpunkt. Dabei ist, wie immer, x_4 gesetzt für ict. Aus 13) fliessen dann unmittelbar die zwei zur Vereinfachung der Rechnung häufig beitragenden Beziehungen:

$$14) \qquad \sum x_n'^2 = -1$$

$$15) \qquad \sum x_n' x_n'' = 0.$$

Die Parallelkurven sind dann wieder gegeben durch den Ansatz 5), den ich schreibe in der Form

$$16) \qquad X_n = x_n + p_{n1} \overline{\overline{=}}_1 + p_{n2} \overline{\overline{=}}_2 + p_{n3} \overline{\overline{=}}_3.$$

Die Vektorbeträge $\overline{\overline{=}}_1, \overline{\overline{=}}_2, \overline{\overline{=}}_3$ sind dann wieder unabhängig von τ, sonst aber veränderliche Parameter.

Da die Ruhgestalt des Elektrons eine Kugel vom Radius a sein

---

[1]) H. Minkowski: Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien, Leipzig-Berlin 1910.

soll, so sind die Weltlinien zugehöriger Punkte beschränkt durch die Ungleichung

17) $$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leqq a^2.$$

Die elektrische Ruhdichte ρ_0 soll konstant sein; der Einfachheit halber wird angenommen, die Ruhladung sei über das ganze Volumen des Elektrons gleichmässig verteilt; sie beträgt dann:

18) $$e_0 = \tfrac{4}{3}\pi\, \rho_0\, a^3.$$

Durch seine Bewegung erregt das Elektron ein elektromagnetisches Feld, das durch den Sechservektor M dargestellt werden soll; seine Vierergeschwindigkeit werde gemessen durch den tangentialen Vektor x_1', x_2', ... und bezeichnet mit v. Da sich das Elektron langsamer bewegt als die Feldwirkung, so wird es von ihr beständig überholt; die dabei auf die Ladungseinheit wirkende Kraft ist:

19) $$f = -v.M$$

wo der Punkt auf das vektorielle Produkt hindeuten soll. Um die gesamte, auf das Elektron wirkende Kraft zu berechnen, muss man diesen Ausdruck über die Ruhgestalt des Elektrons integrieren, also über das durch die Ungleichung 17) angegebene Gebiet. Um das dreifache Integral als einfaches schreiben zu können, setze ich noch:

$$d\,\Omega = d\,\xi_1\, d\,\xi_2\, d\,\xi_3.$$

Dann ist die rückwirkende Gesamtkraft:

20) $$F = \int \rho_0\, f\, d\,\Omega.$$

Versteht man unter k den auf die Einheit der Ladung wirkenden Vektor der äussern Kraft, der vom Weltpunkte (Ort und Zeit) und der dort herrschenden Geschwindigkeit der Elektrizität abhängen möge, so sind die vier Bewegungsgleichungen gegeben durch die Vektorgleichung:

21) $$\int \rho_0\, f\, d\,\Omega + \int \rho_0\, k\, d\,\Omega = 0.$$

Ich beschäftige mich nur mit der Berechnung des ersten Gliedes. Die Berechnung des elektromagnetischen Feldes M erfolgt, wie üblich, mittelst einer Hilfsgrösse, des retardierten Potentials, die dargestellt wird durch einen Vierervektor Φ. Es ist dann:

22) $$M = Curl\ \Phi$$

Dabei hat Φ die folgenden zwei Bedingungen zu erfüllen:

$$\sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n^2} = 0$$

$$Div\ \Phi = 0$$

und es gilt für diese Grösse die Integraldarstellung:

23) $$\Phi_n = \frac{1}{4\pi} \int \bar{\rho}_0 \frac{\bar{x}_n'}{(\bar{X}_1 - X_1)\bar{x}_1' + (\bar{X}_2 - X_2)\bar{x}_2' + (\bar{X}_3 - X_3)\bar{x}_3' + (\bar{X}_4 - X_4)\bar{x}_4'} d\bar{\Omega}$$

Dabei bedeuten die quergestrichenen Grössen für die Eigenzeit $\bar{\tau}$ und die zugehörigen Relativkoordinaten $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$ dieselben Funktionen wie die ungestrichenen für τ, ξ_1, ξ_2, ξ_3; die Integration erstreckt sich über das Gebiet $\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_3^2 \leqq a^2$ und $\bar{\tau}$ ist diejenige Funktion von τ, $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$, die der Gleichung genügt:

24) $$h \equiv (\bar{X}_1 - X_1)^2 + (\bar{X}_2 - X_2)^2 + (\bar{X}_3 - X_3)^2 + (\bar{X}_4 - X_4)^2 = 0$$

und die Ungleichung erfüllt:

25) $$\bar{\tau} \leqq \tau.$$

Nach Minkoswki gibt es eine und nur eine Wurzel τ, die beiden Bedingungen genügt; die Ungleichung sagt aus, dass $\bar{\tau}$ der frühere Moment ist als τ; die Gleichung bedeutet, dass eine im Zeitpunkt $\bar{\tau}$ von dem Punkte $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$ ausgehende Kugelwelle im Zeitpunkt τ den Punkt ξ_1, ξ_2, ξ_3 erreichen wird ($c = 1$).

Die Berechnung von Curl Φ ergibt sechs Komponenten nach der Rechenvorschrift:

26) $$M_{12} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}.$$

Zunächst ist:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1' = \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial \bar{\tau}} &= \bar{x}_1' + \bar{p}_{11}' \bar{\xi}_1 + \bar{p}_{12}' \bar{\xi}_2 + \bar{p}_{13}' \bar{\xi}_3 \\ &= (1 + \bar{P}_1 \bar{\xi}_1 + \bar{P}_2 \bar{\xi}_2 + \bar{P}_3 \bar{\xi}_3) \bar{x}_1' \\ &= \bar{P}\, x_1' \end{aligned}$$

nach Formel 7 *a*) und dem dort folgenden. Allgemein gilt:

27) $$\bar{X}_n' = \bar{P}\, \bar{x}_1'.$$

Der Nenner im Integranden von Φ (23) werde noch abgekürzt durch

28) $$N = \sum[(\overline{X} - X)\,\overline{x}'].$$

Damit lassen sich die gesuchten partiellen Differentialquotienten etwas kürzer angeben; aus

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)_{\overline{\overline{\overline{\quad}}}_1,\ \overline{\overline{\overline{\quad}}}_2,\ \overline{\overline{\overline{\quad}}}_3,\ x_2,\ x_3,\ x_4} = 0$$

oder

$$(\overline{X}_1 - X_1)\,(\overline{P}\,\overline{x}_1'\,\frac{\partial\,\overline{\tau}}{\partial\,x_1} - 1) + (X_2 - X_2)\,\overline{P}\,\overline{x}_2'\,\frac{\partial\,\overline{\tau}}{\partial\,x_1} +$$

$$+ (\overline{X}_3 - X_3)\,P\,x_3'\,\frac{\partial\,\overline{\tau}}{\partial\,x_1} + (X_4 - X_4)\,P\,x_1'\,\frac{\partial\,\overline{\tau}}{\partial\,x_1} = 0$$

folgt

$$\frac{\partial\,\overline{\tau}}{\partial\,x_1} = \frac{\overline{X}_1 - X_1}{\overline{P}\,N}$$

und entsprechend für alle Indizes

$$\frac{\partial\,\overline{\tau}}{\partial\,x_n} = \frac{\overline{X}_n - X_n}{\overline{P}\,N}.$$

Auch wird:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial\,\overline{\tau}}\right)_{\overline{\overline{\overline{\quad}}}_1,\ \overline{\overline{\overline{\quad}}}_2,\ \overline{\overline{\overline{\quad}}}_3,\ \tau,\ \overline{\overline{\quad}}_1,\ \overline{\overline{\quad}}_2,\ \overline{\overline{\quad}}_3} = \sum[(\overline{X} - X)\,\overline{x}''] + \sum\overline{P}\,\overline{x}'^2$$

$$= \sum[(\overline{X} - X)\,x''] - \overline{P}$$

unter Benützung von 27) und 14). Ich substituiere noch

29)
$$\begin{cases} \overline{\overline{\quad}}_1 = a\,\xi_1 \qquad \overline{\quad}_2 = a\,\xi_2 \qquad \overline{\quad}_3 = a\,\xi_3 \\ \overline{\overline{\quad}}_1 = a\,\overline{\xi}_1 \qquad \overline{\quad}_2 = a\,\overline{\xi}_2 \qquad \overline{\quad}_3 = a\,\overline{\xi}_3 \\ \text{und entsprechend} \\ d\,\Omega = a^3\,d\,\omega \\ d\,\Omega = a^3\,d\,\overline{\omega} \end{cases}$$

Dann wird:

$$\frac{\partial\,\Phi_2}{\partial\,x_1} = \frac{a^3\,\bar{\rho}_0}{4\,\pi}\int \frac{N\,\overline{x}_2'' - x_2'\,[\sum[(\overline{X} - X)\,\overline{x}''] - \overline{P}]}{N^2} \cdot \frac{\overline{X}_1 - X_1}{\overline{P}\,N}\,d\overline{\omega}$$

Zu weiterer Abkürzung setze ich:

$$X_n^* = \frac{N\,\overline{x}_n'' - \overline{x}_n'\,[\sum[(\overline{X} - X)\,\overline{x}''] - \overline{P}]}{\overline{P}\,N^3}$$

und erhalte:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} = \frac{a^3 \bar{\rho}_0}{4\pi} \int (\bar{X}_1 - X_1)\, X_2^*\, d\bar{\omega}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = \frac{a^3 \bar{\rho}_0}{4\pi} \int (\bar{X}_2 - X_2)\, X_1^*\, d\bar{\omega}$$

. . . . . .
. . . . . .

Nach 26) lauten die Komponenten des Sechservektors M nun:

$$M_{12} = \frac{a^3 \bar{\rho}_0}{4\pi} \int \left((\bar{X}_1 - X_1)\, X_2^* - (\bar{X}_2 - X_2)\, X_1^*\right) d\bar{\omega} = -M_{21}$$

$$M_{23} = \frac{a^3 \bar{\rho}_0}{4\pi} \int \left((\bar{X}_2 - X_2)\, X_3^* - (\bar{X}_3 - X_3)\, X_2^*\right) d\bar{\omega} = -M_{32}$$

. . . . . .
. . . . . .

Diese sind in 19) einzusetzen, und es ist das vektorielle Produkt aus dem Vierer- und dem Sechservektor zu bilden nach der Regel (in der von Hilbert angegebenen Form):

$$(v \cdot M)_j = v_1 M_{1j} + v_2 M_{2j} + v_3 M_{3j} + v_4 M_{4j}$$

wo allemal ein Term verschwindet, nämlich der mit M_{jj} behaftete. In meinem Fall ergibt dies:

$$\begin{aligned} f_1 &= \quad x_2' M_{12} + x_3' M_{13} + x_4' M_{14} \\ f_2 &= x_1' M_{21} \quad + x_3' M_{23} + x_4' M_{24} \\ f_3 &= x_1' M_{31} + x_2' M_{32} \quad + x_4' M_{34} \\ f_4 &= x_1' M_{41} + x_2' M_{42} + x_3' M_{43} \end{aligned}$$

wo dem Minuszeichen in 19) durch Vertauschung der Indizes der M Rechnung getragen wurde. Es lautet nun beispielsweise die erste Komponente:

$$\begin{aligned} f_1 = \frac{a^3 \bar{\rho}_0}{4\pi} \Big\{ & x_2' \int \left((\bar{X}_1 - X_1)\, X_2^* - (\bar{X}_2 - X_2)\, X_1^*\right) d\bar{\omega} \\ & + x_3' \int \left((\bar{X}_1 - X_1)\, X_3^* - (\bar{X}_3 - X_3)\, X_1^*\right) d\bar{\omega} \\ & + x_4' \int \left((\bar{X}_1 - X_1)\, X_4^* - (\bar{X}_4 - X_4)\, X_1^*\right) d\bar{\omega} \Big\} \end{aligned}$$

Dies ist einzusetzen in 20). Dabei können die Grössen x'_1, x'_2 .... beliebig auch unter die Integralzeichen gesetzt werden, da sie von den Integrationsvariabeln $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, $\bar{\xi}_3$; ξ_1, ξ_2, ξ_3 unabhängig sind; die erste Komponente der Gesamtkraft lautet alsdann:

$$F_1 = \frac{\mu_6 \rho_0 \bar{\rho}_0}{4\pi} \int\int \Big\{ x'_2 \left((\bar{X}_1 - X_1) X_2^* - (\bar{X}_2 - X_2) X_1^*\right)$$

30)

$$+ x'_3 \left((\bar{X}_1 - X_1) X_3^* - (\bar{X}_3 - X_3) X_1^*\right)$$

$$+ x'_4 \left((\bar{X}_1 - X_1) X_4^* - (\bar{X}_4 - X_4) X_1^*\right) \Big\} d\omega\, d\omega$$

Ebenso sind die andern drei Komponenten gebildet. Der Substitution 29) entsprechend sind die sämtlichen Integrale (zweimal) über die Kugel vom Radius Eins zu nehmen. Zur Auswertung entwickle ich die erste Komponente nach Potenzen des Ausdrucks $(\bar{\tau} - \tau)$; diese Grösse selber kann vermöge der Gleichung $h = 0$ und der nachfolgenden Ungleichung 26) durch Potenzen des Radius a ausgedrückt werden.

Entwicklung von h nach Potenzen von $(\bar{\tau} - \tau)$.

$$h = \sum (\bar{x}_n - x_n + a S \bar{p}_{nk} \bar{\xi}_k - a S p_{nk} \xi_k)^2$$

wo gesetzt wurde:

31)

$$S \bar{p}_{nk} \bar{\xi}_k = \bar{p}_{n1} \bar{\xi}_1 + \bar{p}_{n2} \bar{\xi}_2 + \bar{p}_{n3} \bar{\xi}_3$$

$$S p_{nk} \xi_k = p_{n1} \xi_1 + p_{n2} \xi_2 + p_{n3} \xi_3$$

Das Summenzeichen S wird hier immer für solche dreigliedrige Summen innerhalb einer einzigen Koordinatenrichtung verwendet, so dass der Index k weggelassen werden kann.

1) $$\bar{x}_1 - x_1 = x'_1 (\bar{\tau} - \tau) + \frac{x''_1}{2} (\bar{\tau} - \tau)^2 + \frac{x'''_1}{6} (\bar{\tau} - \tau)^3 +$$

$$+ \frac{x_1^{IV}}{24} (\bar{\tau} - \tau)^4 + \frac{x^V}{120} (\bar{\tau} - \tau)^5 + \ldots .$$

$$2)\quad a\,(S\,\bar{p}_1\,\bar{\xi} - S\,p_1\,\xi) =$$
$$a\,S\,p_1\,(\bar{\xi} - \xi)$$
$$+\,a\,x_1'\,S\,P\,\xi\,(\bar{\tau} - \tau)$$
$$+\,\frac{a}{2}\,(x_1''\,S\,P\,\xi + x_1'\,S\,P'\,\xi)\,(\bar{\tau} - \tau)^2$$
$$+\,\frac{a}{6}\,(x_1'''\,S\,P\,\bar{\xi} + 2\,x_1''\,S\,P'\,\bar{\xi} + x_1'\,S\,P''\,\bar{\xi})\,(\bar{\tau} - \tau)^3$$
$$+\,\frac{a}{24}\,(x_1^{IV}\,S\,P\,\bar{\xi} + 3\,x_1'''\,S\,P'\,\bar{\xi} + 3\,x_1''\,S\,P''\,\bar{\xi} + x_1'\,S\,P'''\,\bar{\xi})\,(\bar{\tau} - \tau)^4$$
$$+\,\frac{a}{120}\,(x_1^{V}\,S\,P\,\bar{\xi} + 4\,x_1^{IV}\,S\,P'\,\xi + 6\,x'''\,S\,P''\,\bar{\xi} + 4\,x_1''\,S\,P'''\,\xi + x_1'\,S\,P^{IV}\,\bar{\xi})\,(\bar{\tau} - \tau)^5$$
$$+ \ldots .$$

Addiert:

$$\bar{x}_1 - x_1 + a\,(S\,\bar{p}_1\,\bar{\xi} - S\,p_1\,\xi) =$$
$$a\,S\,p_1\,(\bar{\xi} - \xi)$$
$$+\;x_1'\;(1 + a\,S\,P\,\bar{\xi})\,(\bar{\tau} - \tau)$$
$$+\left(\frac{x_1''}{2}\,(1 + a\,S\,P\,\bar{\xi}) + \frac{a}{2}\,x_1'\,S\,P'\,\bar{\xi}\right)(\bar{\tau} - \tau)^2$$
$$+\left(\frac{x_1'''}{6}\,(1 + a\,S\,P\,\bar{\xi}) + \frac{2\,a}{6}\,x_1''\,S\,P'\,\bar{\xi} + \frac{a}{6}\,x_1'\,S\,P''\,\bar{\xi}\right)(\bar{\tau} - \tau)^3$$
$$+\left(\frac{x_1^{IV}}{24}\,(1 + a\,S\,P\,\bar{\xi}) + \frac{3\,a}{24}\,x_1'''\,S\,P'\,\xi + \frac{3\,a}{24}\,x_1''\,S\,P''\,\bar{\xi} + \right.$$
$$\left. + \frac{a}{24}\,x_1'\,S\,P'''\,\bar{\xi}\right)(\bar{\tau} - \tau)^4$$
$$+\left(\frac{x_1^{V}}{120}\,(1 + a\,S\,P\,\bar{\xi}) + \frac{4\,a}{120}\,x_1^{IV}\,S\,P'\,\bar{\xi} + \frac{6\,a}{120}\,x_1'''\,S\,P''\,\bar{\xi} + \right.$$
$$\left. + \frac{4\,a}{120}\,x_1''\,S\,P'''\,\bar{\xi} + \frac{a}{120}\,x_1'\,S\,P^{IV}\,\bar{\xi}\right)(\bar{\tau} - \tau)^5$$
$$+ \ldots .$$

Dies ist zu quadrieren; das Ergebnis kann bei Berücksichtigung der Formeln 3), 4), 6), 14), 15) leicht sofort über die vier Koordinatenrichtungen summiert werden. Zur Vereinfachung der Schreibweise brauche

ich die Abkürzung b wie in 10); durch Differentiation von 15) finde ich weiter

$$\sum x''^2 + \sum x' \, x''' = 0$$

also

32) $$\sum x' \, x''' = - b^2.$$

Aus

10) $$\sum x''^2 = b^2$$

kommt

33) $$\sum x'' \, x''' = b \, b'.$$

Aus 32) aber folgt durch Differentiation:

$$\sum x'' \, x''' + \sum x' \, x^{IV} = - 2 \, bb'$$

also wegen 33)

34) $$\sum x' \, x^{IV} = - 3 \, bb'$$

Durch das Quadrieren und Summieren entsteht nun an erster Stelle der Ausdruck

$$a^2 [(\bar{\xi}_1 - \xi_1)^2 + (\bar{\xi}_2 - \xi_2)^2 + (\bar{\xi}_3 - \xi_3)^2] = S (\bar{\Xi}_k - \Xi_k)^2$$

also das Quadrat der Ruhentfernung des gestrichenen Punktes vom ungestrichenen. Es werde zur Abkürzung dieser wichtigen Grösse noch eingeführt:

35) $$\varepsilon = \left| [(\bar{\xi}_1 - \xi_1)^2 + (\bar{\xi}_2 - \xi_2)^2 + (\bar{\xi}_3 - \xi_3)^2]^{\frac{1}{2}} \right|$$

Damit liefert die weitere Ausrechnung:

$$h = a^2 \varepsilon^2 +$$

$$+ [(a + a^2 \, S \, P \, \bar{\xi}) \sum (x'' \, S \, p \, (\xi - \xi)) - (1 + a \, S \, P \, \bar{\xi})^2] \, (\bar{\tau} - \tau)^2$$

$$+ \left| \frac{1}{3} (a + a^2 \, S P \bar{\xi}) \sum (x''' \, Sp \, (\bar{\xi} - \xi)) + \frac{2 \, a^2}{3} S P' \, \bar{\xi} \sum (x''' \, Sp (\bar{\xi} - \bar{\xi})) \right.$$

$$\left. - (a + a^2 \, S \, P \, \xi) \, S \, P' \, \bar{\xi} \right| (\bar{\tau} - \tau)^3$$

$$+ \left[\frac{a}{12} \sum (x^{IV} \, Sp \, (\bar{\xi} - \xi)) - \frac{1}{12} \, b^2 \, (1 + 2 \, a \, S \, P \, \bar{\xi} + \ldots) - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{3} \, S \, P'' \, \bar{\xi} + \ldots \right] (\bar{\tau} - \tau)^4$$

$$+ \left[- \frac{1}{12} \, bb' + a \, (\ldots) + a^2 \, (\ldots) \right] (\bar{\tau} - \tau)^5 + \ldots .$$

36)

Die nicht mehr ausgeführten Glieder kommen für meine Rechnung nicht in Betracht. Nun eliminiere ich die P_k und ihre Ableitungen. Aus 9) und 14) folgt

37) $$P_k = \sum x'' \, p_{nk}$$

daher $$S\, P_k\, \bar{\xi}_k = S\,(\bar{\xi}_k \sum p_{nk}\, x'')$$

oder durch andere Zusammenfassung dieser 3 . 4 Terme:

38) $$S\, P\, \bar{\xi} = \sum (x''\, S\, p_{nk}\, \bar{\xi})$$

Hieraus fliesst durch wiederholtes Differentiieren:

38a)
$$\begin{cases} S\, P'\ \bar{\xi} = \sum (x'''\ S\, p_{nk}\, \bar{\xi}) \\ S\, P''\ \bar{\xi} = \sum (x^{IV}\ S\, p_{nk}\, \bar{\xi}) - b^2 \sum (x''\ S\, p_{nk}\, \bar{\xi}) \\ S\, P'''\ \bar{\xi} = \sum (x^{V}\ S\, p_{nk}\, \xi) - b^2 \sum (x'''\ S\, p_{nk}\, \bar{\xi}) - 5\, bb' \sum (x''\ S\, p_{nk}\, \bar{\xi}) \end{cases}$$

Für diese nun ständig in der Rechnung vorkommenden zwölfgliedrigen Summen brauche ich die folgenden Abkürzungen:

39)
$$\begin{cases} O_2 = \sum (x''\ S\, p\, \xi) = x_1''\,(p_{11}\xi_1 + p_{12}\xi_2 + p_{13}\xi_3) \\ \qquad\qquad + x_2''\,(p_{21}\xi_1 + p_{22}\xi_2 + p_{23}\xi_3) \\ \qquad\qquad + x_3''\,(p_{31}\xi_1 + p_{32}\xi_2 + p_{33}\xi_3) \\ \qquad\qquad + x_4''\,(p_{41}\xi_1 + p_{42}\xi_2 + p_{43}\xi_3) \\ Q_2 = \sum (x''\ S\, p\, \bar{\xi}) \\ O_3 = \sum (x'''\ S\, p\, \xi) \\ Q_3 = \sum (x'''\ S\, p\, \bar{\xi}) \\ O_4 = \sum (x^{IV}\, S\, p\, \xi) \\ Q_4 = \sum (x^{IV}\, S\, p\, \bar{\xi}) \text{ und so fort.} \end{cases}$$

Dann ist also

40)
$$\begin{cases} S\, P\ \bar{\xi} = Q_2 \\ S\, P'\ \bar{\xi} = Q_3 \\ S\, P''\ \bar{\xi} = Q_4 - b^2\, Q_2 \\ S\, P'''\ \bar{\xi} = Q_5 - b^2\, Q_3 - 5\, bb'\, Q_2 \end{cases}$$

Nach dem Einsetzen dieser Bezeichnungen wird:

$$h = -(\bar{\tau} - \tau)^2 - \frac{b^2}{12}(\bar{\tau} - \tau)^4 - \frac{bb'}{12}(\bar{\tau} - \tau)^5 + \dots$$

$$- a\left\{(Q_2 + O_2)(\bar{\tau} - \tau)^2 + \frac{1}{3}(2Q_3 + O_3)(\bar{\tau} - \tau)^3\right.$$

41)
$$\left. + \frac{1}{12}(3Q_4 + O_4 - 2b^2 Q_2)(\bar{\tau} - \tau)^4 + \dots\right\}$$

$$+ a^2\left\{\varepsilon^2 - Q_2 O_2(\bar{\tau} - \tau)^2 - \frac{1}{3}(Q_2 O_3 + 2Q_3 O_2)(\bar{\tau} - \tau)^3 + \dots\right\} = 0$$

Berechnung von $(\bar{\tau} - \tau)$.

In $h = 0$, Gleichung 41) führe ich den Ansatz ein:

$$\bar{\tau} - \tau = A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + A_4 a^4 + \dots$$

Die Nullsetzung des Koeffizienten von a^2 liefert dann zunächst

$$A_1^2 = \varepsilon^2.$$

Wegen der Ungleichung bei 25) ist die kleinere Wurzel zu nehmen; also ist

$$A_1 = -\varepsilon.$$

Die Nullsetzung der Koeffizienten von a^3, a^4 und a^5 ergibt dann weiter:

$$A_2 = \frac{\varepsilon}{2}(Q_2 + O_2).$$

$$A_3 = -\frac{\varepsilon}{8}(3Q_2^2 + 2Q_2 O_2 + 3O_2^2) - \frac{\varepsilon^2}{6}(2Q_3 + O_3) + \frac{b^2}{24}\varepsilon^3$$

$$A_4 = \frac{\varepsilon}{16}(5Q_2^3 + 3Q_2^2 O_2 + 3Q_2 O_2^2 + 5O_2^3)$$

42)
$$+ \frac{\varepsilon^2}{24}(4Q_3 Q_2 + 2Q_3 O_2 + Q_2 O_3 + 2O_2 O_3)$$

$$- \frac{\varepsilon^3}{48} b^2 (9Q_2 + 5O_2) + \frac{\varepsilon^3}{24}(3Q_4 + O_4) - \frac{\varepsilon^4}{24} bb'$$

Es ist zu übersehen, dass die A_i ganze rationale Funktionen i-ten Grades der $\bar{\xi}_l$ und ξ_l (nämlich der ε und O) sind und dass sie ε als Faktor enthalten.

Entwicklung des Integranden von F_1 nach Potenzen des Radius a.

Zuerst wird der Ausdruck berechnet, der aus dem ersten Sechservektor (M_{12}) hervorgeht und zwar in der Form $\frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{N}}$, wo $\mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{N}$ Reihen nach Potenzen von a sind. Da die andern Ausdrücke dieser Art denselben Nenner aufweisen, darf zusammengezogen werden in die Form $\frac{x_2' \mathfrak{Z}_2 + x_3' \mathfrak{Z}_3 + x_4' \mathfrak{Z}_4}{\mathfrak{N}}$ und erst zuletzt werde die Division ausgeführt.

I. Entwicklung des Nenners

$$\mathfrak{N} = N^3 (1 + a S \bar{P} \bar{\xi}).$$

1) $$\bar{x}_1' = x_1' + x_1'' (\bar{\tau} - \tau) + \frac{x_1'''}{2} (\bar{\tau} - \tau)^2 + \frac{x_1^{IV}}{6} (\bar{\tau} - \tau)^3 + \frac{x_1^V}{24} (\bar{\tau} - \tau)^4 + \ldots$$

Diese Reihe ist zu multiplizieren mit derjenigen für $\bar{X}_1 - X_1$, wie sie Seite 17 entwickelt ist. Dabei fallen wegen $\sum \bar{p}\, \bar{x}' = 0$ nach der Summierung über die vier Koordinaten alle Glieder weg, die aus der Entwicklung von $S \bar{p}\, \bar{\xi}$ herrühren; man kann also alle die $\bar{\xi}_k$ enthaltenden Glieder weglassen und jene Reihe verwenden in der Form:

2) $$- a S p \xi + x_1 (\bar{\tau} - \tau) + \frac{x_1''}{2} (\bar{\tau} - \tau)^2 + \frac{x_1'''}{6} (\bar{\tau} - \tau)^3 + \frac{x_1^{IV}}{24} (\bar{\tau} - \tau)^4 + \ldots$$

Multiplikation und Summierung liefern

3) $$\begin{aligned} N = & -(1 + a O_2)(\bar{\tau} - \tau) \\ & - \frac{a}{2} O_3 (\tau - \tau)^2 \\ & - \left(\frac{a}{6} O_4 + \frac{b^2}{6}\right)(\bar{\tau} - \tau)^3 \\ & - \left(\frac{a}{24} O_5 + \frac{5\, b b'}{24}\right)(\bar{\tau} - \tau)^4 + \ldots \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} N^3 = & -(1 + 3 a O_2 + 3 a^2 O_2^2 + a^3 O_2^3)(\bar{\tau} - \tau)^3 \\ & - \left(\frac{3}{2} a O_3 + 3 a^2 O_2 O_3 + \ldots\right)(\bar{\tau} - \tau)^4 \\ & - \left(\frac{a}{2} O_4 + \frac{b^2}{2} + a b^2 O_2 + \ldots\right)(\bar{\tau} - \tau)^5 \\ & - \left(\frac{5}{8} b b' + \ldots\right)(\bar{\tau} - \tau)^6 + \ldots \end{aligned}$$

unter Weglassung der Glieder, die schliesslich in a eine höhere als die sechste Potenz aufweisen.

$$1 + a S P \bar{\xi} = 1 + a S P \bar{\xi} + a S P' \bar{\xi} (\bar{\tau} - \tau) + \frac{a}{2} S P'' \bar{\xi} (\bar{\tau} - \tau)^2 + \dots$$

5)
$$= 1 + a Q_2 + a Q_3 (\bar{\tau} - \tau) + \left(\frac{a}{2} Q_4 - \frac{a}{2} b^2 Q_2\right) (\bar{\tau} - \tau)^2 + \dots$$

$$\mathfrak{N} = -\,(1 + a(Q_2 + 3 O_2) + 3 a^2 (Q_2 O_2 - O_2^2) + a^3 (3 Q_2 O_2^2 - O_2^3))(\bar{\tau} - \tau)^3$$
$$- \left(a (Q_3 + \frac{3}{2} O_3) + \frac{3}{2} a^2 (2 Q_3 O_2 + Q_2 O_3 + 2 O_2 O_3) + \dots\right)(\bar{\tau} - \tau)^4$$

6)
$$- \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a}{2}(Q_4 + O_4 + 2 b^2 O_2) + \dots\right)(\bar{\tau} - \tau)^5$$
$$- \left(\frac{5}{8} b b' + \dots\right)(\bar{\tau} - \tau)^6 - \dots$$

Mit $(\bar{\tau} - \tau)^3$ beginnend, enthält dieser Nenner die Potenzen a^3, a^4 ... bis a^6, wo ich abbreche; ich komme dabei mit den berechneten Koeffizienten A_1 bis A_4 gerade noch aus: denn ich habe einzusetzen:

$$(\bar{\tau} - \tau)^3 = A_1^3 a^3 + 3 A_1^2 A_2 a^4 + (3 A_1^2 A_3 + 3 A_1 A_2^2) a^5 + (3 A_1^2 A_4 + 6 A_1 A_2 A_3 + A_2^3) a^6 \dots$$

worin A_5 nicht vorkommt. — Die Umrechnung ergibt:

7) $\mathfrak{N} = N_3 a^3 + N_4 a^4 + N_5 a^5 + N_6 a^6 + \dots$ wo

43)
$$N_3 = \varepsilon^3$$
$$N_4 = -\frac{1}{2} \varepsilon^3 (Q_2 - 3 O_2)$$
$$N_5 = \frac{3}{8} \varepsilon^3 (Q_2^2 - 2 Q_2 O_2 + O_2^2) - \varepsilon^4 O_3 + \frac{3}{8} b^2 \varepsilon^5$$
$$N_6 = -\frac{\varepsilon^3}{16} (5 Q_2^3 - 9 Q_2^2 O_2 + 3 Q_2 O_2^2 + O_2^3) + \frac{\varepsilon^4}{8} (12 Q_3 Q_2 + 6 Q_3 O_2 + 11 Q_2 O_3 + 6 O_2 O_3 - \frac{\varepsilon^5}{16} b^2 (11 Q_2 + 3 O_2) + \frac{\varepsilon^5}{8} (Q_4 + 3 O_4) - \frac{\varepsilon^6}{2} b b'$$

II. Entwicklung von $\mathfrak{Z}_2$.

$$\mathfrak{Z}_2 = (\bar{X}_1 - X_1)\{N\bar{x}_2'' - x_2'(\sum[\bar{x}''(\bar{X}-X)] - 1 - a\,S\,P\,\bar{\xi})\}$$
$$-(X_2 - X_2)\{N\bar{x}_1'' - \bar{x}_1'(\sum[\bar{x}''(\bar{X}-X)] - 1 - a\,S\,\bar{P}\,\bar{\xi})\}$$

Da dieser Zähler bei der Ausführung der Division nicht mehr verschiedene Potenzen zu enthalten braucht als der Nenner, wird seine Entwicklung nur bis $(\bar{\tau}-\tau)^4$ bezw. a^4 einschliesslich geführt. Ich entwickle zuerst den Ausdruck in der ersten geschweiften Klammer.

8) $$\bar{x}_2'' = x_2'' + x_2'''(\bar{\tau}-\tau) + \frac{x_2^{IV}}{2}(\bar{\tau}-\tau)^2 + \frac{x_2^{V}}{6}(\bar{\tau}-\tau)^3 + \frac{x_2^{VI}}{24}(\bar{\tau}-\tau)^4 + \ldots$$

Zu multiplizieren mit der unter Ziffer 3) für N entwickelten Reihe

9) $$N\bar{x}_2'' = -x_2''(1+aO_2)(\bar{\tau}-\tau)$$
$$-\left(x_2''\frac{a}{2}O_3 + x_2'''(1+aO_2)\right)(\bar{\tau}-\tau)^2$$
$$-\left(x_2''\left(\frac{a}{6}O_4 + \frac{b^2}{6}\right) + x_2'''\frac{a}{2}O_3 + x_2^{IV}\frac{1}{2}(1+aO_2)\right)(\bar{\tau}-\tau)^3$$
$$-\left(x_2''\frac{5}{24}bb' + \ldots + x_2'''\frac{b^2}{6} + \ldots + x_2^{V}\frac{1}{6} - \ldots\right)(\bar{\tau}-\tau)^4$$

10) $$\bar{x}_2' = x_2' + x_2''(\bar{\tau}-\tau) + \frac{x_2'''}{2}(\bar{\tau}-\tau)^2 + \frac{x_2^{IV}}{6}(\bar{\tau}-\tau)^3 + \frac{x_2^{V}}{24}(\bar{\tau}-\tau)^4 + \ldots$$

Die nachfolgende runde Klammer erlaubt die Umformung:

$$\sum(\bar{x}''(\bar{x} + a\,S\,\bar{p}\,\bar{\xi} - x - a\,S\,p\,\xi)) - 1 - a\,S\,\bar{P}\,\bar{\xi} =$$
$$\sum\bar{x}''\bar{x} + a\sum(\bar{x}_2''\,S[\bar{p}\,\bar{\xi}]) - \sum\bar{x}''x - a\sum(\bar{x}''\,S[p\,\xi]) - 1 - a\sum(\bar{x}''\,S[\bar{p}\,\bar{\xi}]) =$$
$$\sum\bar{x}''(\bar{x}-x) - a\sum(\bar{x}''\,S\,p\,\xi) - 1.$$

Mit Benützung von Ziffer 1), Seite 16, und 8) und durch Summierung findet man:

11) $$\sum\bar{x}''(\bar{x}-x) = -\frac{b^2}{2}(\bar{\tau}-\tau)^2 - \frac{5}{6}bb'(\bar{\tau}-\tau)^3$$
$$+\left(\frac{1}{6}\sum x'\,x^{V} + \frac{7}{24}\sum x''\,x^{IV} + \frac{1}{6}\sum x'''^2\right)(\bar{\tau}-\tau)^4 + \ldots$$

12) $$a\sum(\bar{x}''\,Sp\,\xi) = aO_2 + aO_3(\bar{\tau}-\tau) + \frac{a}{2}O_4(\bar{\tau}-\tau)^2 + \frac{a}{6}O_5(\bar{\tau}-\tau)^3 + \ldots$$

$$13)\ \sum \overline{x}''(\overline{x} - x) - a\sum(\overline{x}'' S p \xi) - 1 = -(1 + a O_2) - a O_3(\overline{\tau} - \tau) - \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a}{2} O_4\right)(\overline{\tau} - \tau)^2 - \left(\frac{5}{6} bb' + \frac{a}{6} O_5\right)(\overline{\tau} - \tau)^3 + \left(\frac{1}{6}\sum x' x^V + \frac{7}{24}\sum x'' x^{IV} + \frac{1}{6}\sum x'''^2\right)(\overline{\tau} - \tau)^4 + \dots$$

Hieraus durch Multiplikation mit 10):

$$14)\ -\overline{x}_2'\left(\sum \overline{x}''(\overline{X} - X) - 1 - a S \overline{P}\,\overline{\xi}\right) = x_2'(1 + a O_2) + (x_2' a O_3 + x_2'' + x_2''' a O_2)(\overline{\tau} - \tau) + \left\{x_2'\left(\frac{b^2}{2} + \frac{a}{2} O_4\right) + x_2'' a O_3 + x_2'''\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} O_2\right)\right\}(\overline{\tau} - \tau)^2 + \left\{x_2'\left(\frac{5}{6} bb' + \frac{a}{6} O_5\right) + x_2''\left(\frac{b^2}{2} + \frac{a}{2} O_4\right) + x_2''' \frac{a}{2} O_3 + x_2^{IV}\left(\frac{1}{6} + \frac{a}{6} O_2\right)\right\}(\overline{\tau} - \tau)^3 + \dots$$

$$15)\ N\overline{x}_2'' - \overline{x}_2'\left(\sum \overline{x}''(\overline{X} - X) - 1 - a S \overline{P}\,\overline{\xi}\right) = x_2'(1 + a O_2) + x_2' a O_3(\overline{\tau} - \tau) + \left\{x_2'\left(\frac{b^2}{2} + \frac{a}{2} O_4\right) + x_2'' \frac{a}{2} O_3 - x_2'''\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} O_2\right)\right\}(\overline{\tau} - \tau)^2 + \left\{x_2' \frac{5}{6} bb' + x_2'' \frac{b^2}{3} - x_2^{IV} \frac{1}{3} + \dots\right\}(\overline{\tau} - \tau)^3$$

Aus der Entwicklung von h, unterhalb Ziffer 2), kann mit Benüzzung der Formeln auf Seite 19 entnommen werden:

$$16)\ \overline{X}_1 - X_1 = a S p_1(\overline{\xi} - \xi) + x_1'(1 + a Q)(\overline{\tau} - \tau) + \left\{x_1''\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} Q_2\right) + x_1' \frac{a}{2} Q_3\right\}(\overline{\tau} - \tau)^2 + \left\{x_1'''\left(\frac{1}{6} + \frac{a}{6} Q_2\right) + x_1'' \frac{a}{3} Q_3 + x_1' \frac{a}{6}(Q_4 - b^2 Q_2)\right\}(\overline{\tau} - \tau)^3 + \left\{x_1^{IV} \cdot \frac{1}{24} + \dots\right\}(\overline{\tau} - \tau)^4 + \dots$$

woraus dann mit Unterdrückung einzelner Glieder, die beim folgenden Schritt wegfallen:

$$
\begin{aligned}
17)\quad (\overline{X}_1 - X_1)\{N\,\overline{x}_2'' - \overline{x}_2'(\textstyle\sum \overline{x}''\ (\overline{X} - X) - 1 - a\,S\,\overline{P}\,\overline{\xi})\} = \\
& x_2'(a + a^2 O_2)\,S\,p_1(\overline{\xi} - \xi) \\
& + \left\{ x_1'\,x_2'(\ldots) + a^2 O_3\,x_2'\,S\,p_1(\overline{\xi} - \xi) \right\}(\overline{\tau} - \tau) \\
& + \left\{ \frac{1}{2}\,x_1''\,x_2'\,(1 + a\,[Q_2 + O_2] + a^2\,Q_2\,O_2) + x_1'\,x_2'(\ldots) \right. \\
& \quad - \frac{1}{2}\,x_2'(a\,b^2 + a^2 O_4)\,S\,p_1(\overline{\xi} - \xi) + \frac{1}{2}\,x_2''\,a^2 O_3\,S\,p_1(\overline{\xi} - \xi) \\
& \quad \left. - \frac{1}{2}\,x_2'''\,(a + a^2 O_2)\,S\,p_1(\overline{\xi} - \xi) \right\}(\overline{\tau} - \tau)^2 \\
& + \left\{ \frac{1}{6}\,x_1'''\,x_2'(1 + a\,[Q_2 + O_2]) + \frac{1}{3}\,x_1''\,x_2'\,a\,Q_3 + x_1'\,x_2'(\ldots) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2}\,x_1''\,x_2'\,a\,O_3 + \frac{1}{2}\,x_1'\,x_2''\,a\,O_3 - \frac{1}{2}\,(1 + a\,[Q_2 + O_2])\,x_1'\,x_2''' \\
& \quad + \frac{5}{6}\,x_2'\,a\,b\,b'\,S\,p_1(\overline{\xi} - \xi) + \frac{1}{3}\,x_2''\,a\,b^2\,S\,p_1(\overline{\xi} - \xi) - \\
& \quad \left. - \frac{a}{3}\,x_2^{IV}\,S\,p_1(\overline{\xi} - \xi) \right\}(\overline{\tau} - \tau)^3 \\
& + \left\{ \frac{1}{24}\,x_1^{IV}\,x_2' + x_1'\,x_2'(\ldots) + \frac{1}{4}\,x_1''\,x_2'\,b^2 + \frac{1}{3}\,x_1'\,x_2''\,b^2 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4}\,x_1''\,x_2''' - \frac{1}{3}\,x_1'\,x_2^{IV} \right\}(\overline{\tau} - \tau)^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

Hierin sind die Indizes 1 und 2 zu vertauschen, der so gewonnene Ausdruck ist von dem vorstehenden abzuziehen:

$$
\begin{aligned}
3_2 = & \left(x_2'\,S\,[p_1(\overline{\xi} - \xi)] - x_1'\,S\,[p_2(\overline{\xi} - \xi)]\right)(a + a^2 O_2) \qquad 18) \\
& + \left(x_2'\,S\,[p_1(\overline{\xi} - \xi)] - x_1'\,S\,[p_2(\xi - \xi)]\right) a^2 O_3\,(\overline{\tau} - \tau) \\
& + \left\{ \frac{1}{2}(x_1''\,x_2' - x_1'\,x_2'')(1 + a\,[Q_2 + O_2] + a^2\,Q_2\,O_2) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2}\left(x_2'\,S\,[p_1(\overline{\xi} - \xi)] - x_1'\,S\,[p_2(\overline{\xi} - \xi)]\right)(a\,b^2 + a^2 O_4) \\
& \quad + \frac{1}{2}\left(x_2''\,S\,[p_1(\overline{\xi} - \xi)] - x_1''\,S\,[p_2(\overline{\xi} - \xi)]\right) a^2 O_3 \\
& \quad \left. - \frac{1}{2}\left(x_2'''\,S\,[p_1(\overline{\xi} - \xi)] - x_1'''\,S\,[p_2(\overline{\xi} - \xi)]\right)(a + a^2 O_2) \right\}(\overline{\tau} - \tau)^2
\end{aligned}
$$

$$+\left\{\frac{1}{3}(x_1''x_2' - x_1'x_2'')aQ_3 + \frac{2}{3}(x_1'''x_2' - x_1'x_2''')(1 + a[Q_2 + O_2])\right.$$
$$+\frac{5}{6}(x_2' S[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_1' S[p_2(\bar\xi - \xi)])\, abb'$$
$$+\frac{1}{3}(x_2'' S[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_1'' S[p_2(\bar\xi - \xi)])\, ab^2$$
$$\left.-\frac{1}{3}(x_2^{IV} S[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_1^{IV} S[p_2(\bar\xi - \xi)])\, a\right\}(\bar\tau - \tau)^3$$
$$+\left\{\frac{3}{8}(x_1^{IV}x_2' - x_1'x_2^{IV}) + \frac{1}{12}(x_1'x_2'' - x_1''x_2')\, b^2\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}(x_1''x_2''' - x_1'''x_2'')\right\}(\bar\tau - \tau)^4 + \ldots$$

III. Der gesamte Zähler

$$x_2'\mathfrak{Z}_2 + x_3'\mathfrak{Z}_3 + x_4'\mathfrak{Z}_4.$$

$\mathfrak{Z}_3$ wird aus $\mathfrak{Z}_2$ abgeleitet durch Vertauschung der Zeiger 2 und 3, ebenso $\mathfrak{Z}_4$ durch Vertauschung von 2 und 4. Bei der in der Überschrift verlangten Operation erleiden die unter 18) ersichtlichen Komponenten von Sechservektoren die folgenden Vereinfachungen:

$$x_2'^2 S[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_1'x_2' S[p_2(\bar\xi - \xi)]$$
$$+ x_3'^2 S[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_1'x_3' S[p_3(\bar\xi - \xi)]$$
$$+ x_4'^2 S[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_1'x_4' S[p_4(\bar\xi - \xi)] =$$
$$(\sum(x'^2) - x_1^2) S[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_1'(\sum x' S[p(\xi - \xi)] - x_1' S[p_1(\xi - \bar\xi)]) =$$
$$(1 - x_1'^2) S[p_1(\bar\xi - \xi)] + x_1'^2 S[p_1(\xi - \xi)] = - S[p_1(\xi - \xi)].$$

Ähnlich:

$$x_2'(x_1''x_2' - x_1'x_2'') + x_3'(x_1''x_3' - x_1'x_3'') + x_4'(x_1''x_4' - x_1'x_4'') =$$
$$x_1''(\sum(x'^2) - x_1'^2) - x_1'(\sum(x'x'') - x_1'x_1'') = -x_1''$$

$$x_2'x_2'' S[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_2'x_1'' S[p_2(\bar\xi - \xi)] + \ldots.$$
$$= (\sum(x'x'') - x_1'x_1'')\sum[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_1''(\sum x' S[p(\xi - \xi)] -$$
$$- x_1' S[p_1(\bar\xi - \xi)]) =$$
$$x_2'x_2''' S[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_2'x_1''' S[p_2(\bar\xi - \xi)] + \ldots$$
$$= (\sum(x'x''') - x_1'x_1''') S[p_1(\bar\xi - \xi)] - x_1'''(\sum x' S[p(\bar\xi - \xi)] -$$
$$- x_1' S[p_1(\bar\xi - \xi)]) = -b^2 S[p_1(\bar\xi - \xi$$

$$x_2' x_2^{IV} S[p_1(\bar{\xi}-\xi)] - x_2' x_1^{IV} S[p_1(\bar{\xi}-\xi)] + \ldots\ldots$$
$$= (\sum(x' x^{IV}) - x_1' x_1^{IV}) S[p_1(\bar{\xi}-\xi)] - x_1^{IV}(\sum x' S[p(\bar{\xi}-\xi)]) -$$
$$- x_1' S[p_1(\bar{\xi}-\xi)]) = -3bb' S[p_1(\bar{\xi}-\xi)]$$

$$x_2'(x_1''' x_2' - x_1' x_2''') + \ldots = x_1'''(\sum(x'^2) - x_1^2) - x_1'(\sum(x' x''') - x_1' x_1''')$$
$$= b^2 x_1' - x_1'''$$

$$x_2'(x_1^{IV} x_2' - x_1' x_2^{IV}) + \ldots = x_1^{IV}(\sum(x'^2) - x_1'^2) - x_1'(\sum(x' x^{IV}) - x_1' x_1^{IV})$$
$$= 3bb' x_1' - x_1^{IV}$$

$$x_2'(x_1'' x_2''' - x_1''' x_2'') + \ldots = x_1''(\sum(x' x''') - x_1' x_1''') - x_1'''(\sum(x' x'') - x_1' x_1'')$$
$$= -b^2 x_1''$$

Somit wird:

19)
$$x_2' \mathfrak{Z}_2 + x_3' \mathfrak{Z}_3 + x_4' \mathfrak{Z}_4 = -S[p_1(\bar{\xi}-\xi)](a + a^2 O_2)$$
$$- S[p_1(\bar{\xi}-\xi)] a^2 O_3 (\bar{\tau}-\tau)$$
$$+ \Big\{ -\frac{1}{2} x_1''(1 + a[Q_2 + O_2] + a^2 Q_2 O_2)$$
$$- \frac{1}{2} S[p_1(\bar{\xi}-\xi)] a^2 O_4$$
$$+ \frac{1}{2} S[p_1(\bar{\xi}-\xi)] a^2 b^2 O_2 \Big\} (\bar{\tau}-\tau)^2$$
$$+ \Big\{ -\frac{1}{3} x_1'' a Q_3 + \frac{2}{3}(b^2 x_1' - x_1''')(1 + a[Q_2 + O_2])$$
$$+ \frac{1}{6} S[p_1(\bar{\xi}-\xi)] abb' \Big\} (\bar{\tau}-\tau)^3$$
$$+ \Big\{ \frac{3}{8}(3bb' x_1' - x_1^{IV}) + \frac{1}{3} x_1'' b_2 \Big\} (\bar{\tau}-\tau)^4 + \ldots$$

Die Umrechnung in eine Potenzreihe nach a

20) $x_2' \mathfrak{Z}_2 + x_3' \mathfrak{Z}_3 + x_4' \mathfrak{Z}_4 = Z_1 a + Z_2 a^2 + Z_3 a^3 + Z_4 a^4 + \ldots$

liefert die Koeffizienten:

44)
$$Z_1 = -S[p_1(\bar{\xi}-\xi)]$$
$$Z_2 = -O_2 S[p_1(\bar{\xi}-\xi)] - \frac{\varepsilon^2}{2} x_1''$$
$$Z_3 = \varepsilon O_3 S[p_1(\bar{\xi}-\xi)] - \frac{2}{3}\varepsilon^3 (b^2 x_1' - x_1''')$$
$$Z_4 = -\frac{\varepsilon}{2}(Q_2 O_3 + O_2 O_3) S[p_1(\bar{\xi}-\xi)] -$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{2}(O_4 - b^2 O_2)\, S\,[p_1(\bar{\xi} - \xi)] +$$
$$+ \frac{\varepsilon^3}{6}\Big[- x_1'' O_3 + 2\,(b^2 x_1' - x_1''')(Q_2 + O_2) -$$
$$- bb'\, S\,[p_1(\bar{\xi} \quad \xi)]\Big] +$$
$$+ \frac{3}{8}\varepsilon^4 (3\, bb'\, x_1' - x_1^{IV} + b^2 x_1'').$$

Auch hier wieder sind die Koeffizienten von a^n ganze rationale Funktionen n-ten Grades der $\bar{\xi}$ und ξ.

IV. Der Quotient:

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}} = \frac{Z_1 a + Z_2 a^2 + Z_3 a^3 + Z_4 a^4 + \ldots}{N_3 a^3 + N_4 a^4 + N_5 a^5 + N_6 a^6 + \ldots}$$

Es werde angesetzt:

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}} = B_{-2} \cdot \frac{1}{a^2} + B_{-1} \cdot \frac{1}{a} + B_0 + B_1 a + \ldots$$

Dann ergeben sich durch Ausmultiplizieren zur Bestimmung der B_i die Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned}
B_{-2} N_3 &= Z_1 \\
B_{-1} N_3 + B_{-2} N_4 &= Z_2 \\
B_0 \; N_3 + B_{-1} N_4 + B_{-2} N_5 &= Z_3 \\
B_1 \; N_3 + B_0 N_4 + B_{-1} N_5 + B_{-2} N_6 &= Z_4
\end{aligned}$$

Sie liefern:

$$B_{-2} = -\frac{1}{\varepsilon^3} S\, p_1(\bar{\xi} - \xi)$$

$$B_{-1} = -\frac{1}{2\varepsilon} x_1'' - \frac{1}{2\varepsilon^3}(Q_2 - O_2)\, S\, p_1(\bar{\xi} - \xi)$$

$$B_0 = -\frac{1}{4\varepsilon} x_1''(Q_2 - 3\, O_2) - \frac{2}{3}(b^2 x_1' - x_1''') +$$
$$+ \Big\{\frac{3}{8\varepsilon} b^2 + \frac{1}{8\varepsilon^3}(Q_2^2 + 2\, Q_2\, O_2 \quad 3\, O_2^2)\Big\} S\, p_1(\bar{\xi} - \xi)$$

$$B_1 = + \Big\{\frac{1}{16\varepsilon}(Q_2^2 - 6\, Q_2\, O_2 \quad 15\, O_2^2) - \frac{2}{3} O_3 + \frac{9}{16} b^2 \varepsilon\Big\} x_1'' +$$
$$+ \frac{4}{3} O_2 (b^2 x_1' - x_1''') + \frac{3}{8}\varepsilon (3\, bb'\, x_1' - x_1^{IV}) +$$

$$+\left\{-\frac{1}{16\,\varepsilon^3}(Q_2^3+Q_2^2\,O_2+3\,Q_2\,O_2^2-5\,O_2^3)\right.$$
$$+\frac{3}{8\,\varepsilon^2}(4\,Q_3\,Q_2+2\,Q_3\,O_2+Q_2\,O_3+2\,O_2\,O_3)$$
$$\left.-\frac{b^2}{16\,\varepsilon}(5\,Q_2+7\,O_2)+\frac{1}{8\,\varepsilon}(Q_4-O_4)-\frac{2}{3}bb'\right\}S\,p_1(\bar{\xi}\quad\xi). \tag{45}$$

Die Koeffizienten B_i sind allgemein gebrochene rationale Funktionen i-ten Grades der $\bar{\xi}_k$, ξ_k; im Nenner kommen die $\bar{\xi}_k$, ξ_k nur in Potenzen von $\varepsilon = [(\bar{\xi}_1-\xi_1)^2+(\bar{\xi}_2-\xi_2)^2+(\bar{\xi}_3-\xi_3)^2]^{\frac{1}{2}}$ vor.

Damit ist die Reihe für den Integranden in ihren wesentlichsten Gliedern berechnet. Diese enthalten aber noch den Parallelkurvenansatz in Gestalt des Vektorsystems der p_{nk}.

Die Elimination des Parallelkurvenansatzes.

F_1 (30) bleibt ungeändert, wenn man auf die p eine dreidimensionale orthogonale Transformation ausübt; denn diese hat die gleiche Wirkung wie eine orthogonale Transformation der $\bar{\xi}_k$, ξ_k. Hierbei muss das Integral in sich selbst übergehen, weil das Integrationsgebiet die Kugel ist. F_1 ist daher eine Orthogonalinvariante der p. Alle Orthogonalinvarianten der p sind aber Funktionen der elementaren $O.$-$I.$ $\sum_n p_{n1}^2$, $\sum_n p_{n1}\,p_{n2}$ etc. Diese sind nach 3) und 4) blosse Zahlen (1 oder o); also ist F_1 unabhängig von den p. Darum verschwinden einige von den Integralen, und aus den übrigen müssen sich die p eliminieren lassen.

Es treten nämlich Integrale auf, die, abgesehen von den gegen die $\bar{\xi}$, ξ konstanten Grössen, folgende Form haben

$$\int\int \varepsilon^\lambda\,(\bar{\xi}_l+\xi_l)^\mu\,(\bar{\xi}_m-\xi_m)^\nu\,d\,\bar{\omega}\,d\,\omega \qquad l,\,m=1,\,2,\,3.$$

Durch die Substitution

α) $$\bar{\xi}_1\,|\,\xi_1 \quad \bar{\xi}_2\,|\,\xi_2 \quad \bar{\xi}_3\,|\,\xi_3$$

deren Determinante $+1$ ist, wird das Integral nicht geändert; es geht aber in den entgegengesetzten Wert über, wenn ν ungerade ist, d. h. es verschwindet für jedes ungerade ν. Ebenso ist vermittelst der Substitution

β) $$\bar{\xi}_1\,|\,-\xi_1 \quad \bar{\xi}_2\,|\,-\xi_2 \quad \bar{\xi}_3\,|\,-\xi_3$$

zu zeigen, dass das Integral auch für jedes ungerade μ verschwinden muss. Somit ist das Integral nur dann von Null verschieden, wenn μ und ν beide gerade sind.

Aus diesem Grunde verschwinden ohne weiteres die Integrale der Ausdrücke:

$$\frac{B_{-2}}{\frac{3}{8\varepsilon} b^2 \, S\, p_1 (\bar{\xi} - \xi) \text{ in } B_0}$$

$$-\frac{2}{3} b b' \, S\, p_1 (\bar{\xi} - \xi) \text{ in } B_1$$

Ausserdem lassen sich durch die Substitution $\alpha)$ noch einige andere Integrale auf die das Verschwinden anzeigende Form bringen; es ist nämlich zunächst:

$$\int\int \xi \, d\bar{\omega} \, d\omega = \int\int \xi \, d\bar{\omega} \, d\omega = \frac{1}{2} \int\int (\bar{\xi} + \xi) \, d\bar{\omega} \, d\omega = 0$$

Die analoge Beziehung gilt aber auch für die Ausdrücke von der Gestalt:

$$Q_2 = \sum (x'' \, S\, p\, \bar{\xi}),\ O_2, Q_3 \text{ usw., also}$$

$$\int\int Q_i \, d\bar{\omega} \, d\omega = \int\int O_i \, d\bar{\omega} \, d\omega = \frac{1}{2} \int\int (Q_i + O_i) \, d\bar{\omega} \, d\omega = 0$$

Aus diesem Grunde verschwinden auch noch die Integrale von

$$-\frac{1}{4\varepsilon} x_1'' (Q_2 - 3\, O_2) \quad \text{in } B_0$$

$$-\frac{2}{3} O_3 \quad \text{in } B_1$$

$$+\frac{4}{3} O_2 (b^2 x_1' - x_1''') \text{ in } B_1$$

Weiter kann der zweite Term von B_{-1} geschrieben werden:

$$-\frac{1}{2\varepsilon^3} \left\{ (\bar{\xi}_1 - \xi_1) \sum x'' p_{n1} + (\bar{\xi}_2 - \xi_2) \sum x'' p_{n2} + (\bar{\xi}_3 - \xi_3) \sum x'' p_{n3} \right\}$$
$$((\bar{\xi}_1 - \xi_1) p_{11} + (\bar{\xi}_2 - \xi_2) p_{12} + (\bar{\xi}_3 - \xi_3) p_{13})$$

Beim Ausmultiplizieren entstehen Produkte mit gleichen Indizes in den $\bar{\xi}_k, \xi_k$ und Produkte mit ungleichen. Die Integrale der letztern verschwinden; denn das Integral

$$\int\int \frac{(\bar{\xi}_1 - \xi_1)(\bar{\xi}_2 - \xi_2)}{\varepsilon^\lambda}$$

erhält durch die Substitution

$\gamma)$ $\quad \bar{\xi}_1 \,|\, -\bar{\xi}_1 \quad \xi_1 \,|\, -\xi_1 \quad \bar{\xi}_2 \,|\, \bar{\xi}_2 \quad \xi_2 \,|\, \xi_2 \quad \bar{\xi}_3 \,|\, \bar{\xi}_3 \quad \xi_3 \,|\, \xi_3$

entgegengesetztes Vorzeichen, ohne dass es sich ändern kann, ist also gleich Null. Es bleiben somit nur die Produkte, die irgend ein $(\bar{\xi}_k - \xi_k)$ im Quadrat enthalten:

$$-\frac{1}{2\varepsilon^3}\left\{(\bar{\xi}_1-\xi_1)^2\, p_{11}\sum x''\, p_{n1} + (\bar{\xi}_2-\xi_2)^2\, p_{12}\sum x''\, p_{n2} + \right.$$
$$\left. + (\bar{\xi}_3-\xi_3)^2\, p_{13}\sum x''\, p_{n3}\right\}$$

Da sich aber wegen der Kugelgestalt des Elektrons die Grenzen nicht ändern, so ist

$$\int\int\frac{(\bar{\xi}_1-\xi_1)^2}{\varepsilon^3}\,d\omega\,d\omega = \int\int\frac{(\bar{\xi}_2-\xi_2)^2}{\varepsilon^3}\,d\bar{\omega}\,d\omega = \int\int\frac{(\bar{\xi}_3-\xi_3)}{\varepsilon^3}\,d\bar{\omega}\,d\omega$$
$$= \frac{1}{3}\int\int\frac{(\bar{\xi}_1-\xi_1)^2+(\bar{\xi}_2-\xi_2)^2+(\bar{\xi}_3-\xi_3)^2}{\varepsilon^3}\,d\bar{\omega}\,d\omega$$
$$= \frac{1}{3}\int\int\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\,d\bar{\omega}\,d\omega = \frac{1}{3}\int\int\frac{d\bar{\omega}\,d\omega}{\varepsilon}$$

wegen 35).

Das Integral des zweiten Terms aus B_{-1} heisst deshalb

$$-\frac{1}{6}\left(p_{11}\sum x''\, p_{n1} + p_{12}\sum x''\, p_{n2} + p_{13}\sum x''\, p_{n3}\right)\int\int\frac{d\bar{\omega}\,d\omega}{\varepsilon}$$

Es ist nun wegen 9), 11) und 15)

46) $$\sum x''\, p_{nk} = P_k = b\,\cos\,(x''\,|\,p_{nk}) \qquad (k = 1,2,3)$$

Weil p_{n1}, p_{n2}, p_{n3} und x'_n vier aufeinander senkrechte Vektoren sind, gilt wie in der entsprechenden Cosinusformel des R_3

$$p_{11}\cos\,(x''|p_{n1}) + p_{12}\cos\,(x''|p_{n2}) + p_{13}\cos\,(x''|p_{n3}) + x'_1\cos\,(x''|x') = \frac{x''_1}{b}$$

worin das vierte Glied links verschwindet; der Klammerausdruck vor dem Integral wird:

47) $$S\,(p_{1k}\sum x''\, p_{nk}) = x''_1$$

Das Integral vereinfacht sich so zu

$$-\frac{1}{6}\,x''_1\int\int\frac{d\bar{\omega}\,d\omega}{\varepsilon}$$

Auf den Integranden

$$\frac{1}{\varepsilon^3}\,(Q_2^2 + 2\,Q_2\,O_2 - 3\,O_2^2)\,S\,p_1\,(\bar{\xi}-\xi)$$

der aus der geschweiften Klammer von B_0 stammt, wende ich die Substitution an:

$\delta)$ $\qquad \bar{\xi}_k \Big| -\bar{\xi}_k \qquad \xi_k \Big| -\xi_k \qquad (k = 1,2,3)$

Er geht dadurch in den entgegengesetzten Wert über; das Integral verschwindet also.

Ich komme zum Integral des ersten Ausdrucks in B_1. Wird Q_2^2 ausgeschrieben, so liefert es Produkte mit gleichen und solche mit ungleichen Indizes in den $\bar{\xi}_k$. Die letztern verschwinden beim Integrieren, wie sich durch Substitutionen nach Art von $\gamma)$ zeigen lässt; es bleibt dann zunächst übrig:

$$\frac{x_1''}{16}\left\{(\sum x'' p_{n1})^2 \int\int_\varepsilon \bar{\xi}_1^2 d\bar{\omega}\, d\omega + (\sum x'' p_{n2})^2 \int\int_\varepsilon \bar{\xi}_2^2 d\bar{\omega}\, d\omega + (\sum x'' p_{n3})^2 \int\int_\varepsilon \bar{\xi}_3^2 d\bar{\omega}\, d\omega\right\}$$

Die hier vorkommenden Integrale sind wegen der Kugelgestalt des Elektrons unter sich gleich und können daher ersetzt werden durch:

$$\frac{1}{3}\int\int_\varepsilon (\bar{\xi}_1^2 + \xi_2^2 + \bar{\xi}_3^2)\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

Ich führe zur Abkürzung noch ein

$$\bar{r}^2 = \bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_3^2 \qquad r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

und erhalte

$$\frac{x_1''}{48}\left\{(\sum x'' p_{n1})^2 + (\sum x'' p_{n2})^2 + (\sum x'' p_{n3})^2\right\} \int\int_\varepsilon \bar{r}^2\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

oder wegen 9) und 12)

$$\frac{b^2 x_1''}{48}\int\int_\varepsilon \bar{r}^2\, d\bar{\omega}\, d\omega = \frac{b^2}{48} x_1'' \int\int_\varepsilon \bar{r}^2\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

Dazu kommt von dem analog gebauten Gliede mit $-\frac{15}{16} O_2^2$ der Wert

$$-\frac{15}{48} b^2 x_1'' \int\int_\varepsilon r^2\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

also zusammen

$$-\frac{7}{24} b^2 x_1'' \int\int_\varepsilon r^2\, d\bar{\omega}\, d\omega = -\frac{7}{48} b^2 x_1'' \int\int_\varepsilon (\bar{r}^2 + r^2)\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

Ganz ebenso erhalte ich für das Integral des Gliedes mit $\frac{6}{16}\frac{Q_2 O_2}{\varepsilon} x_1''$ den Wert

$$\frac{1}{8} b^2 x_1'' \int\int_\varepsilon w\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

wo gesetzt wurde

$$w = \bar{\xi}_1 \xi_1 + \bar{\xi}_2 \xi_2 + \bar{\xi}_3 \xi_3$$

Durch entsprechende Umrechnungen ergibt sich für die weitern in B vorkommenden Glieder:

$$-\frac{1}{16}\int\int\frac{1}{\varepsilon^3}(Q_2^3 + Q_2^2 O_2 + 3 Q_2 O_2^2 - 5 O_2^3)\, S p_1 (\bar{\xi} - \xi)\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

$$= -\frac{1}{16}\int\int\frac{1}{\varepsilon^3}(5 Q_2^3 - 3 Q_2^2 O_2 - Q_2 O_2^2 - O_2^3)\, S p_1 (\bar{\xi} - \xi)\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

$$= -\frac{1}{16}\int\int\frac{1}{\varepsilon^3}(3 Q_2^3 - Q_2^2 O_2 + Q_2 O_2^2 - 3 O_2^3)\, S p_1 (\bar{\xi} - \xi)\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

$$= -\frac{8}{48}\int\int\frac{1}{\varepsilon^3}(Q_2^3 - O_2^3)\, S p_1 (\bar{\xi} - \xi)\, d\bar{\omega}\, d\omega -$$

$$-\frac{1}{48}\int\int\frac{1}{\varepsilon^3}(Q_2 - O_2)^3\, S p_1 (\bar{\xi} - \xi)\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

$$= -\frac{1}{6} b^2 x_1''\int\int\frac{1}{\varepsilon^3}(\bar{\xi}_1^3 - \xi_1^3)(\bar{\xi}_1 - \xi_1)\, d\bar{\omega}\, d\omega -$$

$$-\frac{1}{48} b^2 x_1''\int\int\frac{1}{\varepsilon^3}(\bar{\xi}_1 - \xi_1)^4\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

welch letztere Integrale durch eine orthogonale Substitution übergeführt werden können in

$$-\frac{1}{30} b^2 x_1''\int\int\frac{\bar{r}^4 + r^4 - w(\bar{r}^2 + r^2)}{\varepsilon^3}\, d\bar{\omega}\, d\omega \quad -\frac{1}{240} b^2 x_1''\int\int\varepsilon\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

Das nächste Integral

$$\frac{3}{8}\int\int\frac{1}{\varepsilon^2}(4 Q_3 O_2 + 2 Q_3 O_2 + Q_2 O_3 + 2 O_2 O_3)\, S p_1 (\bar{\xi} - \xi)\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

verschwindet, wie durch die Substitution δ) gezeigt wird.

Weiter ist wieder vermöge der Substitution β)

$$-\frac{b^2}{16}\int\int\frac{1}{\varepsilon}(5 Q_2 + 7 O_2)\, S p_1 (\bar{\xi} - \xi)\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

$$= -\frac{b^2}{16}\int\int\frac{1}{\varepsilon}(-7 Q_2 - 5 O_2)\, S p_1 (\bar{\xi} - \xi)\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

$$= +\frac{b^2}{16}\int\int\frac{1}{\varepsilon}(Q_2 - O_2)\, S p_1 (\bar{\xi} - \xi)\, d\bar{\omega}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{48} b^2 x_1''\int\int\varepsilon\, d\bar{\omega}\, d\omega.$$

Ganz analog wird das nächste Integral umgerechnet; durch zweimaliges Differentiieren der Formel 47) ergibt sich für den Koeffizienten

48) $p_{11}\sum x^{IV}p_{n1}+p_{12}\sum x^{IV}p_{n2}+p_{13}\sum x^{IV}p_{n3}=x^{IV}-3bb'x_1'$

somit

$$\frac{1}{8}\int\int\frac{1}{\varepsilon}(Q_4-O_4)\,Sp_1(\bar{\xi}-\xi)\,d\bar{\omega}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{24}(x_1^{IV}-3bb'x_1')\int\int\varepsilon\,d\bar{\omega}\,d\omega.$$

Damit sind alle noch vorkommenden Verbindungen der p_{nk} zurückgeführt auf die Ableitungen der Koordinaten der gegebenen Weltkurve und die daraus zusammengesetzten Orthogonalinvarianten. Die noch verbleibenden Integrale sind lediglich Zahlenwerte (Vielfache von π^2).

Die aus B_1 entstehenden Integrale mit dem Faktor b^2x_1'' vereinige ich noch auf dem gleichen Nenner, verwende die Identität

$$\bar{r}^2+r^2-2w=\varepsilon^2$$

zur Beseitigung von w und erhalte

$$b^2x_1''\Big\{-\frac{7}{48}\int\int\frac{\bar{r}^2+r^2}{\varepsilon}d\bar{\omega}\,d\omega+\frac{9}{16}\int\int\varepsilon\,d\bar{\omega}\,d\omega-$$

$$-\frac{1}{30}\int\int\frac{\bar{r}^4+r^4-w(\bar{r}^2+r^2)}{\varepsilon^3}d\bar{\omega}\,d\omega-\frac{1}{240}\int\int\varepsilon\,d\bar{\omega}\,d\omega-$$

$$-\frac{1}{48}\int\int\varepsilon\,d\bar{\omega}\,d\omega+\frac{1}{8}\int\int\frac{w}{\varepsilon}\Big\}$$

$$=\frac{1}{60}b^2x_1''\int\int\frac{1}{\varepsilon^3}(31\varepsilon^4-6(\bar{r}^2-r^2)\varepsilon^2-(\bar{r}^2-r^2)^2)\,d\bar{\omega}\,d\omega$$

Alle die gefundenen Werte setze ich nun in den Ausdruck für die Komponente der Gesamtkraft (30) ein; ich eliminiere dabei noch die Ruhdichte, indem ich vermöge 18) wieder die Ruhladung einführe:

$$r_0=\bar{r}_0=\frac{3e_0}{4\pi a^3}$$

und erhalte so für die Komponente die nach Potenzen des Radius a geordnete Reihe:

$$F_1=\frac{9e_0^2}{64\pi^3}\Big\{-\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{3}x_1''\int\int\frac{d\bar{\omega}\,d\omega}{\varepsilon}+\frac{2}{3}(x_1'''-b^2x_1')\int\int d\bar{\omega}\,d\omega$$

49)

$$+a\Big[\frac{1}{3}(3bb'x_1'-x_1^{IV})\int\int\varepsilon\,d\bar{\omega}\,d\omega$$

$$+\frac{1}{60}b^2x_1''\int\int\frac{31\varepsilon^4-6(\bar{r}^2-r^2)\varepsilon^2-(\bar{r}^2-r^2)^2}{\varepsilon^3}d\bar{\omega}\,d\omega\Big]+\ldots\Big\}$$

Durch Einführung der Lichtgeschwindigkeit c wieder zu den gewöhnlichen Einheiten übergehend, erhalte ich:

$$F_1 = \frac{9\,e_0^2}{64\,\pi^3\,c^2}\left\{-\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{3}\,x_1''\int\!\!\int\frac{d\bar\omega\,d\omega}{\varepsilon}+\frac{2}{3}\left(\frac{x_1'''}{c}-\frac{b^2\,x_1'}{c^3}\right)\int\!\!\int d\bar\omega\,d\omega\right.$$

49a)
$$+\,a\left[\frac{1}{3}\left(3\,\frac{bb'\,x_1'}{c^4}-\frac{x_1^{IV}}{c^2}\right)\int\!\!\int\varepsilon\,d\bar\omega\,d\omega\right.$$

$$\left.\left.+\,\frac{1}{60}\,\frac{b^2\,x_1''}{c^4}\int\!\!\int\frac{31\,\varepsilon^4-6\,(\bar r^2-r^2)\,\varepsilon^2-(\bar r^2-r^2)^2}{\varepsilon^3}\,d\bar\omega\,d\omega\,\right|+\ldots.\right\}$$

Die Integrale sind dabei zweimal über die Einheitskugel zu nehmen; die gebrauchten Abkürzungen bedeuten:

$$b=\left|\,(x_1''^2+x_2''^2+x_3''^2-c^2\,t''^2)^{\frac{1}{2}}\,\right|$$

$$\varepsilon^2=(\bar\xi_1-\xi_1)^2+(\bar\xi_2-\xi_2)^2+(\bar\xi_3-\xi_3)^2$$

$$\bar r^2=\bar\xi_1^2+\bar\xi_2^2+\bar\xi_3^2 \qquad r^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$$

$$d\bar\omega=d\,\bar\xi_1\,d\,\bar\xi_2\,d\,\bar\xi_3 \qquad d\omega=d\,\xi_1\,d\,\xi_2 d\,\xi_3$$

Die andern drei Komponenten ergeben sich aus dieser einfach durch Vorrücken der Indizes der x_1, x_2.... Damit ist die gesuchte Umformung gefunden. Ich ermittle nun nur noch den Betrag der Kraft bis zu dem von a freien Gliede. Indem ich für die zwei ersten Integrale ihre Zahlenwerte

$$\int\!\!\int\frac{d\,\bar\omega\,d\,\omega}{\varepsilon}=\frac{32}{15}\,\pi^2 \qquad \int\!\!\int d\,\bar\omega\,d\,\omega=\frac{16}{9}\,\pi^2$$

einsetze, erhalte ich für den Anfang der Reihe:

$$F_1=\frac{e_0^2}{\pi\,c^2}\left\{-\frac{x_1''}{5\,a}+\frac{1}{6}\left(\frac{x_1'''}{c}-\frac{b^2\,x_1'}{c^3}\right)+\ldots\right\}$$

Durch Quadrieren und Addieren der vier Komponenten erhält man das Quadrat des Betrages; daraus ergeben sich als die ersten Glieder der Reihe für die Kraft:

$$F=\frac{e_0^2}{\pi\,c^2}\left\{-\frac{1}{a}\cdot\frac{b}{5}+\frac{1}{6}\,\frac{b'}{c}+\ldots\right\}$$

Der Koeffizient von $-b$

$$m=\frac{e_0^2}{5\,\pi\,a\,c^2}$$

ist die elektromagnetische Masse des Elektrons; das von a freie Glied

$$\frac{e_0^2}{6\,\pi\,c^3}\,b'$$

ist das Glied, von dem die Strahlung des Elektrons in erster Linie abhängt. Beide Ausdrücke stimmen mit den Berechnungen von Born und Abraham überein; sie finden sich auch genau, gleich ausgedrückt, in der Arbeit von W. Behrens und E. Hecke.

Zur Konvergenz der angewandten Reihen kann noch viel gesagt werden; sie ist zunächst bloss wahrscheinlich, handelt es sich doch um Potenzen sehr kleiner Grössen. Es ist möglich, dass ein strikter Konvergenzbeweis geleistet werden kann, ausgehend von Untersuchungen, die Schwarzschild[1]) über ähnliche Reihenentwicklungen angestellt hat.

II.

Eine integrallose Darstellung von Parallelkurven im dreidimensionalen Raum.

Die gegebene Kurve sei dargestellt durch drei Funktionen eines beliebigen Parameters τ:

$$x = x\,(\tau)$$
$$y = y\,(\tau)$$
$$z = z\,(\tau).$$

Dann lautet der allgemeine Ansatz 5), auf drei Dimensionen reduziert:

$$\text{5a)} \qquad \begin{aligned} X &= x + A\,p_1 + B\,q_1 \\ Y &= y + A\,p_2 + B\,q_2 \\ Z &= z + A\,p_3 + B\,q_3 \end{aligned}$$

wo A und B Konstanten sind, und für die p und q entsprechend den Formeln 3), 4), 6) die Gleichungen gelten:

$$\text{3a)} \qquad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \\ q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{4a)} \qquad p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = 0$$

$$\text{6a)} \qquad \begin{cases} p_1 x'_1 + p_2 x'_2 + p_3 x'_3 = 0 \\ q_1 x'_1 + q_2 x'_2 + q_3 x'_3 = 0 \end{cases}$$

[1]) K. Schwarzschild: Zur Elektrodynamik III; Über die Bewegung des Elektrons. Göttinger Nachrichten 1903, math.-phys. Klasse.

Diese Bedingungen lassen sich im R_3 durch eine Legendretransformation erfüllen, indem man ansetzt:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s) - s\frac{d\varphi}{ds} \\ y &= \psi(s) - s\frac{d\psi}{ds} \\ z &= \chi(s) - s\frac{d\chi}{ds} \end{aligned} \qquad \textbf{50)}$$

wo die Funktionen φ, ψ, χ des Parameters s so beschaffen sein müssen, dass

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = 1 \qquad \textbf{51)}$$

wo die Ableitung nach s mit Strichen bezeichnet ist, und folglich durch Differentiieren:

$$\varphi'\,\varphi'' + \psi'\,\psi'' + \chi'\,\chi'' = 0 \qquad \textbf{51a)}$$

Dies lässt sich als eine Orthogonalitätsbedingung zwischen den Vektoren $\varphi' \ldots$ und $\varphi'' \ldots$ auffassen. Nun folgt aber aus 50) durch Differentiieren

$$\textbf{52)} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = -s\,\varphi'' \\ \dfrac{dy}{ds} = -s\,\psi'' \\ \dfrac{dz}{ds} = -s\,\chi'' \end{cases}$$

oder, wenn noch

$$Q = -\frac{1}{s}\cdot\frac{d\tau}{ds}$$

eingeführt wird:

$$\textbf{52a)} \quad \begin{cases} \varphi'' = Q\,x' \\ \psi'' = Q\,y' \\ \chi'' = Q\,z' \end{cases}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung 51 a) ergibt sich

$$\varphi'\,x' + \psi'\,y' + \chi'\,z' = 0$$

d. h. der Vektor φ', ψ', χ' steht auf der gegebenen Kurve normal; da er wegen 51) ein Einheitsvektor ist, darf er gleich einem der gesuchten Vektoren p, q gesetzt werden:

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi' \\ p_2 &= \psi' \\ p_3 &= \chi' \end{aligned}$$

womit die Bedingungen 3a) und 6a) (je die obere Zeile) erfüllt sind.

Der andere, noch unbekannte Vektor q hat die drei übrigen Bedingungen zu erfüllen. Die zwei homogenen Gleichungen 4a) und 6a) (untere Zeile) lassen sich nun auf die Form bringen:

$$\varphi' q_1 + \psi' q_2 + \chi' q_3 = 0$$
$$\varphi'' q_1 + \psi'' q_2 + \chi'' q_3 = 0$$

Setzt man nun noch zur Abkürzung:

$$k = (\varphi''^2 + \psi''^2 + \chi''^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ positiv,}$$

so kann man diesen Gleichungen und der Bedingung 3a), dass q ein Einheitsvektor sein soll, genügen durch:

$$q_1 = \pm \frac{\psi' \chi'' - \psi'' \chi'}{k}$$

.....

wobei noch über das Zeichen verfügt werden kann. Um zu erreichen, dass die Vektoren x', p, q ein Rechtssystem bilden, wähle ich das Minuszeichen, setze also

$$q_1 = \frac{\chi' \psi'' - \chi'' \psi'}{k}$$
$$q_2 = \frac{\varphi' \chi'' - \varphi'' \chi'}{k}$$
$$q_3 = \frac{\psi' \varphi'' - \psi'' \varphi'}{k}$$

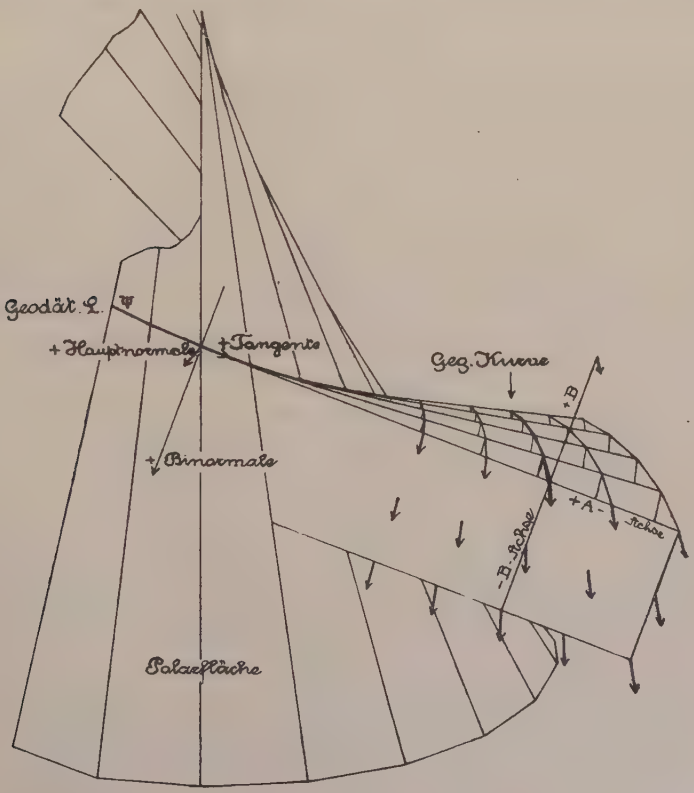
Die gefundenen Werte von p_n und q_n setze ich in 5a) ein und erhalte die folgende Darstellung der Parallelkurven im R_3

$$\textbf{53)} \quad \begin{cases} X = \varphi + (A - s)\,\varphi' + B\,\dfrac{\chi' \psi'' - \chi'' \psi'}{k} \\ Y = \psi + (A - s)\,\psi' + B\,\dfrac{\varphi' \chi'' - \varphi'' \chi'}{k} \\ Z = \chi + (A - s)\,\chi' + B\,\dfrac{\psi' \varphi'' - \psi'' \varphi'}{k} \end{cases}$$

Diese Formeln lassen eine anschauliche, rein geometrische Deutung zu. Die Funktionen φ, ψ, χ von s können angesehen werden als die Koordinaten einer Raumkurve $\mathfrak{P}$, die den Parameter s zum Bogen hat; die Gleichung 51) sagt nämlich aus, dass $d\varphi^2 + d\psi^2 + d\chi^2 = ds^2$.

Setzt man nun zunächst B = 0, so zeigt der Rest auf der rechten Seite der Gleichung an, dass es eine einparametrige Schar von Parallelkurven gibt, die Filarevolventen der Kurve $\mathfrak{P}$ sind. Denn

es wird von dieser Kurve, der Filarevolute, jeweilen vom Bezugspunkte aus auf der Tangente (mit den Richtungscosinus φ', ψ', χ') eine Strecke abgetragen, die sich beim Weiterrücken auf der Kurve Ψ um den dabei zurückgelegten Bogen verkürzt. Die Tangente ist dann zugleich eine Normale der gegebenen Kurve, und der Bezugspunkt auf Ψ kann angesehen werden als der Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Normalen der gegebenen Kurven. Nun können sich solche Normalen, wenn überhaupt, nur in der Schnittgeraden zweier konsekutiver Normalebenen schneiden. Man weiss daher vom Bezugspunkt, dass er auf einer solchen „Krümmungsachse" liegen muss. Die Schar der Normalebenen umhüllt die Polarfläche der gegebenen Kurve; diese Fläche ist abwickelbar, weil sie die Krümmungsachsen zu Erzeugenden hat. Die Gesamtheit der Bezugspunkte, die Kurve Ψ, muss daher auf der Polarfläche liegen. Ihre Hauptnormale im Bezugspunkte hat das Tripel φ'', ψ'', χ'' zu Richtungs-



grössen; dasselbe gilt aber von der Tangente entsprechender Punkte der Parallelkurven, wie sich durch Differentiieren dort ergibt; folglich sind diese Richtungen parallel. Deshalb steht diese Hauptnormale senkrecht zur zugehörigen Normalebene, die gerade im Bezugspunkt Tangentenebene an die Polarfläche ist. Also ist die Hauptnormale der Kurve Ψ zugleich Flächennormale der Polarfläche. Dies erfordert aber, dass Ψ auf der Polarfläche eine Geodätische sei.

Aus jeder Kurve der A-Schar erhält man nun Kurven der B-Schar, indem man sie um den Betrag von B in der Richtung der negativen Binormalen von Ψ versetzt, denn die Binormale hat zur Richtungscosinus die Grössen

$$\frac{\psi' \chi'' - \psi'' \chi'}{k} \quad , \quad \frac{\chi' \varphi'' - \chi'' \varphi'}{k} \quad , \quad \frac{\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi'}{k} \quad .$$

Die Skizze soll diese Beziehungen deutlich machen; sie stellt ein Stück der Polarfläche der gegebenen Kurve dar; von einigen Normalebenen habe ich einen rechtwinkligen Streifen stehen lassen; auf dem vordersten sind die Relativkoordinaten A, B eingetragen.

Denkt man sich in der Skizze die Polarfläche in die Zeichnungsebene ausgebreitet, indem man die Normalebenen um die zugehörigen Krümmungsachsen dreht, so reduziert sich die gegebene Kurve auf einen Punkt, ihren Schnitt mit der Polarfläche, und die Geodätische Ψ wird zu einer Geraden durch diesen Punkt. Solcher Geraden gibt es ∞^1, und diese alle sind gleichberechtigt; jede davon kann als Hilfskurve Ψ genommen werden. Mit dieser Betrachtung stimmt es überein, dass jede reelle, nicht gerade Raumkurve ∞^1 Filarevoluten besitzt (G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume. Leipzig 1901).

Nun bleibt noch zu zeigen, dass es im allgemeinen möglich ist, die Parallelkurven in der angegebenen Form darzustellen. Es genügt dazu der Nachweis der Durchführbarkeit der Transformation 50).

1. Eigentliche Raumkurven.

Da die gegebene Kurve nicht in einer zur Z-Achse normalen Ebene liegen kann, darf man sie darstellen durch zwei Gleichungen:

$$x = f(z)$$
$$y = g(z)$$

Es gilt dann, das folgende Gleichungssystem aufzulösen:

$$\text{I} \qquad \varphi - s\,\varphi' = f(\chi - s\,\chi')$$
$$\text{II} \qquad \psi - s\,\psi' = g(\chi - s\,\chi')$$
$$\text{III} \qquad \varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = 1$$

Ich nehme nun zunächst an, dass die Auflösung nach φ, ψ, χ möglich ist; dann ist wegen der Veränderlichkeit von z

$$\frac{dz}{ds} = -s\,\chi'' \neq 0$$

54) also $\chi'' \neq 0 \quad \chi' \neq$ konst.

Nun differentiiere ich die Gleichungen I und II nach s, bezeichne die Ableitungen der Funktionen f und g nach ihrem Argument als f' und g', streiche den Faktor $-s$ und differentiiere auch Gleichung III; dadurch erhalte ich ein System, das bis auf additive Konstanten mit dem ersten System aequivalent ist:

$$\text{I a} \qquad \varphi'' = \chi''\,f'$$
$$\text{II a} \qquad \psi'' = \chi''\,g'$$
$$\text{III a} \qquad \varphi'\,\varphi'' + \psi'\,\psi'' + \chi'\,\chi'' = 0$$

Ersetzt man φ'', ψ'' durch die Werte aus Ia, IIa, so wird aus IIIa nach Wegschaffen des von Null verschiedenen Faktors χ'' die Gleichung

$$\text{IV} \qquad f'\,\varphi' + g'\,\psi' + \chi' = 0$$

die das geometrisch schon Erkannte besagt, dass die gegebene Kurve und die Hilfskurve in entsprechenden Punkten normale Tangenten besitzen. Die vorhin ausgeführte Operation lässt sich an dieser Gleichung wiederholen und liefert

$$\text{V} \qquad -s f''\,\varphi' + f'^2 - s\,g''\,\psi' + g'^2 + 1 = 0$$

Schreibe ich nun die beiden letzten Gleichungen in der Gestalt

$$\text{IV} \qquad f'\,\varphi' + g'\,\psi' = -\chi'$$
$$\text{V} \qquad f''\,\varphi' + g''\,\psi' = \frac{f'^2 + g'^2 + 1}{s}$$

so erkennt man, dass sich φ', ψ' durch χ' und bekannte Funktionen von χ, χ' ausdrücken lassen, falls

$$D = \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} \neq 0$$

Diese Bedingung ist aber durch die Beschränkung auf Raumkurven schon erfüllt; denn aus

$$\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} = 0$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{g''}{g'} &= \frac{f''}{f'} \\ \log g' &= \log f' + \log c_1 \\ g' &= c_1 f' \\ g &= c_1 f + c_2 \end{aligned}$$

oder

$$y = c_1 x + c_2$$

und die gegebene Kurve würde in einer zur Z-Achse parallelen Ebene liegen, also keine eigentliche Raumkurve sein. In unserem Falle verschwindet also die Determinante nicht und es wird:

55)
$$\varphi' = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\chi'}{s} & g' \\ \frac{f'^2 + g'^2 + 1}{s} & g'' \end{vmatrix}}{D}$$

$$\psi' = \frac{\begin{vmatrix} f' & -\frac{\chi'}{s} \\ f'' & \frac{f'^2 + g'^2 + 1}{s} \end{vmatrix}}{D}$$

und hieraus durch Einsetzen in III

56)
$$\frac{\left|\begin{matrix} -\frac{\chi'}{s} & g' \\ \frac{f'^2 + g'^2 + 1}{s} & g'' \end{matrix}\right|^2}{D^2} + \frac{\left|\begin{matrix} f' & -\frac{\chi'}{s} \\ f'' & \frac{f'^2 + g'^2 + 1}{s} \end{matrix}\right|^2}{D^2} + \chi'^2 = 1$$

Nun untersuche ich, ob sich diese Gleichung nach χ' auflösen lässt. Da die Funktionen f, g und somit auch D das Argument $\chi - s\chi'$ besitzen, ist es zweckmässig, vorher die folgende Legendretransformation durchzuführen:

57)
$$\begin{aligned} \chi' &= u \\ \chi - s\chi' &= v \\ s &= -\frac{dv}{du} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in 56) und Ausmultiplizieren findet sich eine quadratische Gleichung:

$$58)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{wo} & A\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + B\frac{dv}{du} + C = 0 \\ & A = (f''^2 + g''^2 + D^2)\,u^2 - D^2 \\ & B = -2u\,(f'f'' + g'g'')\,(f'^2 + g'^2 + 1) \\ & C = (f'^2 + g'^2)\,(f'^2 + g'^2 + 1)^2. \end{array} \right.$$

Diese Differentialgleichung definiert eine unbekannte Funktion v der unabhängigen Variabeln u; die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit ist die, dass A und B nicht beide verschwinden.

Aus $B = 0$ folgt zunächst

$$\begin{aligned} f'f'' + g'g'' &= 0 \\ f'^2 + g'^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Die gegebene Kurve besitzt alsdann konstante Steigung. Es ist weiter

$$g' = \sqrt{c^2 - f'^2}$$

$$g'' = -\frac{f'f''}{\sqrt{c^2 - f'^2}}$$

$$D^2 = c^4\frac{f''^2}{c^2 - f'^2}$$

$$f''^2 + g''^2 = c^2\frac{f''^2}{c^2 - f'^2}$$

$$A = (c^4 + c^2)\frac{f''^2}{c^2 - f'^2}u^2 - c^4\frac{f''^2}{c^2 - f'^2}$$

Wenn nun auch noch $A = 0$, so erfordert dies $f'' = 0$, worauf wegen $B = 0$ auch g'' verschwindet; das ist aber eine Gerade. Also können $A = 0$ und $B = 0$ bei einer Raumkurve für keine $v\,(u)$ identisch in u erfüllt sein. Also ist die Gleichung 58) immer lösbar. Die Lösungen sind reell, wenn die Diskriminante

$$\triangle = (f'^2 + g'^2 + 1)^2 D^2 \{f'^2 + g'^2 - u^2(f'^2 + g'^2 + 1)\} > 0$$

oder

$$u^2 < \frac{f'^2 + g'^2}{f'^2 + g'^2 + 1} < 1.$$

Dies bedeutet eine Beschränkung von u auf ein wirkliches (von Null verschiedenes) Intervall. Das Intervall schrumpft auf einen Punkt zusammen, nur wenn $f' = g' = 0$, also wiederum für keine eigentliche Raumkurve.

Wenn u in diesem Intervall liegt, hat die Gleichung 58) reelle Lösungen; ist $v(u)$ die eine Lösungsschar, so ist $v(-u)$ die andere.

Ich mache nun die Lösungen v der Gleichung 58) zum Ausgangspunkt.

α) Es sei $\frac{dv}{du} \neq konst.$; dann lässt sich χ finden; denn die Transformation 57) lässt sich rückwärts auflösen:

$$59) \quad \begin{cases} s = -\frac{dv}{du} \\ \chi' = u \\ \chi = v - u\frac{dv}{du} \end{cases}$$

Ist χ so gefunden, so berechnen sich ψ', φ' als Funktionen von s durch die gewöhnlichen Gleichungen 55), die mit 56) zusammen die Gleichung III und somit auch IIIa befriedigen. Es ist nun nur noch zu zeigen, dass die so erhaltenen Lösungen auch den Gleichungen I und II genügen. Indem ich die Gleichungen 55) nach $-\chi'$ und $\frac{f'^2 + g'^2 + 1}{s}$ auflöse, was immer möglich ist, da die Determinante wieder gleich D ist, erhalte ich die Gleichungen IV und V. Indem ich Gleichung IV mit χ'' multipliziere und das Produkt von Gleichung IIIa subtrahiere, erhalte ich

$$\varphi' (\varphi'' - f' \chi'') + \psi' (\psi'' - g' \chi'') = 0$$

Indem ich ferner Gleichung IV differentiiere und mit Gleichung V analog kombiniere, bekomme ich

$$f' (\varphi'' - f' \chi'') + g' (\psi'' - g' \chi'') = 0$$

Diese Gleichungen lassen sich nach φ'', ψ'' auflösen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi' & \psi' \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, und ergeben

$$\text{Ia} \quad \varphi'' = \chi'' f'$$
$$\text{IIa} \quad \psi'' = \chi'' g'$$

Durch Multiplikation mit $-s$ und Integration gelangt man hieraus wieder auf I und II zurück; über die Konstanten darf man entsprechend verfügen, da die Gleichungen Ia, IIa mit den Gleichungen I, II nur bis auf additive Konstanten aequivalent sind. Die obige Determinante verschwindet aber nicht, weil dies zusammen mit den Glei-

chungen III, IV und V auf einen Widerspruch, bezw. auf $s = o$ führen würde.

β) Es sei $\frac{dv}{du} = a$; $v = au + b$, so lässt sich die Transformation nicht rückwärts auflösen; setze ich für v wieder $z = \chi - s\chi'$, so erhalte ich durch Einsetzen der sich hier ergebenden Werte in 58) die Differentialgleichung zweiter Ordnung in f und g:

$$(z-b)^2 (f''^2 + g''^2 + D^2) - 2(z-b)(f'^2 + g'^2 + 1)(f' f'' + g' g'') +$$
60) $$+ (f'^2 + g'^2)(f'^2 + g'^2 + 1)^2 - a^2 D^2 = 0.$$

Die Striche bedeuten hierbei die Ableitung der gegebenen Funktionen $x = f(z)$ und $y = g(z)$ nach z. Diese Gleichung definiert die Kurven, für welche die Darstellung 50) nicht gelingt; ich habe mich nicht weiter mit ihr beschäftigt.

Alle übrigen Raumkurven sind in der angegebenen Weise darstellbar.

2. Ebene Kurven.

Die gegebene Kurve, die keine Gerade sein soll, sei dargestellt in der Form $y = f(x)$.

so dass also $f' \neq konst.$

$f'' \neq 0$

Das aufzulösende Gleichungssystem besteht dann aus nur zwei Gleichungen, da $\chi = 0$ gesetzt werden kann:

I $\quad \psi - s\psi' = f(\varphi - s\varphi')$

II $\quad \varphi'^2 + \psi'^2 = 1$

Es soll untersucht werden, ob dieses System für alle ebenen, nicht geraden Kurven auflösbar ist. Angenommen, es sei auflösbar, so ist

$$\frac{dx}{ds} = -s\varphi'' \neq 0$$

$$\varphi'' \neq 0$$

und aus I und II folgen durch Differentiieren die Gleichungen:

Ia $\quad \psi'' = \varphi'' f'$

IIa $\quad \varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0$

wovon die letztere gleichbedeutend mit

III $\quad \varphi' + \psi' f' = 0$

$$\psi' = -\frac{\varphi'}{f'}$$

Durch Einsetzen in II ergibt sich die Differentialgleichung

$$\varphi'^2 = \frac{f'^2}{f'^2 + 1} \qquad 61)$$

worin f' das Argument $\varphi - s\,\varphi'$ besitzt. Ich benütze deswegen wieder die Legendretransformation

$$\varphi' = u$$
$$\varphi - s\,\varphi' = v$$
$$-s = +\frac{dv}{du}$$

wodurch die Differentialgleichung übergeht in die Gleichung

$$u^2 = \frac{f'^2(v)}{f'^2(v) + 1} \qquad 62)$$

die gar keinen Differentialquotienten enthält, und in der Form

$$f'^2(v) = \frac{u^2}{1 - u^2} \qquad 62a)$$

zeigt, dass sie nach v aufgelöst werden kann, sofern f'', wie vorausgesetzt, nicht verschwindet und $u^2 \neq 1$, reell, wenn $u^2 < 1$, was wegen II im reellen Gebiet zutrifft. Wenn die Transformation rückwärts ausgelöst werden kann $\left(\frac{dv}{du} \neq c\right)$, so ist erwiesen, dass die Differentialgleichung 61) Lösungen besitzt. Von dieser Gleichung ausgehend, erhält man nun sofort für $\psi' = -\frac{\varphi'}{f'}$ die entsprechenden Lösungen. Quadriert man diese letztere Gleichung, so erfüllen φ' und ψ' zusammen die Bedingung II, folglich auch IIa: durch Einsetzen des obigen Wertes für ψ' in IIa wird unmittelbar auch Ia befriedigt; durch Multiplikation dieser Gleichung mit $-s$, Integration und geeignete Verfügung über die Konstanten erhält man hieraus die Gleichung I. Die Hilfskurve erweist sich dabei als die gewöhnliche Evolute der gegebenen Kurve. Aber nicht alle zweidimensionalen Kurven haben Evoluten.

Es ist nämlich noch auszuschliessen der Fall, dass die Transformation nicht rückwärts aufgelöst werden kann wegen

$$\frac{dv}{du} = c = konst.$$

$$v = c\,u + a$$

denn dann wäre $u = \dfrac{v - a}{c}$

also wegen 61a)

$$f' = \frac{v - a}{\sqrt{c^2 - (v - a)^2}}$$

$$f = -\sqrt{c^2 - (v - a)^2} + b$$

oder, wenn wieder $f = y$ und $v = \varphi - s\,\varphi' = x$ gesetzt wird:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

Das sind aber die sämtlichen Kreise der Ebene.

Das System ist also für ebene Kurven auflösbar, wenn der Fall des Kreises und der Geraden ausgeschlossen bleibt.

3. Die Geraden.

Es ist keine Gerade vollständig darstellbar. Um dies zu zeigen, wähle ich die gegebene Gerade als X-Achse; dann ist aufzulösen das System

$$\text{I} \quad y = \psi - s\,\psi' = 0$$
$$\text{II} \quad \varphi'^2 + \psi'^2 = 1$$

Dieses System ist sehr leicht lösbar; denn schreibe ich I in der Form

$$s\,\psi' - \psi \cdot \frac{1}{s^2} = 0$$

so erhalte ich durch Integration sofort

$$\frac{\psi}{s} = a$$
$$\psi = a\,s$$
$$\psi' = a$$

und durch Einsetzen in II: $\varphi' = \sqrt{1 - a^2}$

$$\varphi = \sqrt{1 - a^2}\,s + b.$$

Aber nun wird:

$$x = \varphi - s\,\varphi' = b = konst.$$
$$y = \psi - s\,\psi' = 0.$$

Es wird also nur ein Punkt dargestellt und zwar der Schnittpunkt der φ, ψ-Kurve mit der gegebenen Geraden. Dies ist leicht geometrisch zu erklären; denn eine Gerade kann weder Filiarevolute noch Filarevolvente sein; auch ist sie Spezialfall des Kreises.

Ergebnisse.

Während bis jetzt die Bewegung des Bornschen Elektrons nur für einige Spezialfälle untersucht worden ist, gelang es mir mit Hilfe eines von Herrn Prof. Hecke angegebenen Ansatzes von Parallelkurven im Raume von vier Dimensionen für die ganz allgemeine Bewegung des als kugelförmig angenommenen Elektrons, die Kraft, die das Elektron auf sich selbst ausübt, nach Potenzen seines Radius zu entwickeln und dabei den Parallelkurvenansatz wieder zu eliminieren. Die berechnete Reihe enthält die „elektromagnetische Masse“ und das Glied, von dem die Strahlung des Elektrons in erster Linie abhängt; in den Kraftkomponenten kommt der Betrag der „Beschleunigung“ selber vor.

In einem zweiten Teil habe ich noch eine neue integrallose Darstellung von Parallelkurven im dreidimensionalen Raume angegeben, welche die allgemeine Bewegung des Elektrons in zwei Dimensionen durchzurechnen gestattet.

VITA.

Ich, Erwin Voellmy, wurde am 3. September 1886 in Herzogenbuchsee geboren als Sohn des Dessinateurs Erwin Voellmy und seiner Ehefrau Karoline, geb. Grossenbacher. Meine Eltern, in Sissach heimatberechtigt, übersiedelten bald nach Basel. Ich besuchte die hiesigen Schulen und verliess im Herbst 1904 die Obere Realschule mit dem Reifezeugnis. Während der Schulzeit verlor ich meinen trefflichen Vater. Obwohl seit 1904 an der Basler Universität immatrikuliert, konnte ich mich nicht eigentlich dem Studium widmen; ich durchlief die Fachkurse zur Ausbildung von Primarlehrern, erlangte 1906 das Patent und gleichzeitig eine Anstellung als Vikar mit fixem Pensum an der Knabenprimarschule. In diese Zeit fällt meine Einbürgerung in Basel. Schon 1908 wurde ich defenitiv als Primarlehrer angestellt. Neben der Ausübung des Amtes hörte ich stets einzelne Vorlesungen; zu fruchtbringendem Studium gelangte ich aber erst, als ich im Frühling 1914 durch die Freundlichkeit meiner vorgesetzten Behörde einen Urlaub von 1¼ Jahr erhielt. Ich schloss diesen Urlaub damit ab, dass ich die Prüfung für die Lehramtskandidaten der unteren Stufe der Mittelschule bestand.

Während dieser Zeit besuchte ich die Vorlesungen und Uebungen der folgenden hiesigen Professoren und Dozenten: H. Kinkelin, O. Spiess, L. Bieberbach, R. Flatt, E. Hecke, A. Hagenbach, H. Zickendraht, H. Veillon, G. Braun, F. Heman, K. Hübscher, A. Burckhardt, E. Villiger, A. Gessler, J. Schneider, J. Landmann, P. Ganz, C. Cornelius. Allen diesen Herren danke ich für die empfangene Förderung.

Die vorliegende Dissertation ist unter Leitung des Herrn Prof. Dr. E. Hecke entstanden; es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Hecke an dieser Stelle für Anregung und Ratschläge meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.